

THÈSE

présentée par

Luc REBILLARD

pour obtenir le grade de DOCTEUR

de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

(Arrêté ministériel du 30 mars 1992)

(spécialité : **Mathématiques Appliquées**)

**Etude théorique et algorithmique des séries de Chebyshev
solutions d'équations différentielles holonomes**

Date de soutenance : 6 juillet 1998

Composition du Jury :

P.-J. LAURENT (président)

A. RONVEAUX (rapporteur)

J. VAN ISEGHEM (rapporteur)

C. CHAFFY (examinateur)

J. DELLA DORA (examinateur)

Thèse préparée au sein du Laboratoire LMC-IMAG

*A la mémoire de
Jean-Christophe Blanc*

Remerciements

Je remercie Jean Della Dora, mon directeur de thèse, pour la confiance qu'il m'a accordée, pour le recul qu'il m'a apporté par ses judicieuses remarques et pour la bonne humeur qui l'accompagne en permanence.

Claudine Chaffy a proposé le sujet de cette thèse, elle a suivi et soutenu ma progression avec une grande attention, elle a été, enfin et surtout, d'un constant soutien moral. De tout cela, je lui suis infiniment reconnaissant.

Moulay Barkatou m'a été d'une aide précieuse par ses connaissances sur les opérateurs aux différences, l'asymptotique Gevrey et la théorie de la resommation. Je l'en remercie chaleureusement.

Monsieur Pierre-Jean Laurent m'a fait l'honneur immense d'être mon président de jury. Cet honneur est à la hauteur de l'estime et de l'admiration que j'ai pour lui.

Mes remerciements vont aussi à mes rapporteurs. J'exprime ma gratitude envers Madame Jeannette Van Iseghem qui a consenti de grands efforts pour se plier à des contraintes de dates et d'horaires très inconfortables. Je remercie Monsieur André Ronveaux pour sa relecture experte de mon mémoire, ses conseils avisés et le soutien qu'il a apporté à mon enthousiasme pour l'approche hypergéométrique des polynômes orthogonaux classiques.

Enfin, je remercie tous les membres de l'équipe Calcul Formel au sein de laquelle j'ai bénéficié de conditions de travail idéales en termes de compétences, d'écoute et d'encouragements.

Table des matières

Index des notations	11
Introduction	13
I Approche algorithmique des séries orthogonales	17
1 Séries orthogonales	19
1.1 Opérations formelles sur les séries de fonctions	19
1.1.1 Exemple introductif : les séries de Taylor	19
1.1.2 Opérateurs aux différences	20
1.1.3 Séries formelles de fonctions	22
1.1.4 La transformation de Mellin formelle	24
1.2 Polynômes orthogonaux classiques	26
1.2.1 Rappels sur les polynômes orthogonaux	26
1.2.2 Polynômes hypergéométriques	29
1.2.3 Polynômes hypergéométriques et orthogonalité	31
1.2.4 Identification des polynômes hypergéométriques	31
1.2.5 Relations différences-différentielles	36
1.3 Des polynômes aux séries	41
1.3.1 Action d'un opérateur différentiel	41
1.3.2 Application : construction de récurrences	47
1.4 Conclusion	52
2 Outils informatiques pour les séries orthogonales	53
2.1 Représentation des séries orthogonales	53
2.1.1 Séries : la structure OS	53
2.1.2 Séries partielles : la structure OSP	54
2.2 Opérations sur les séries	57
2.2.1 Opérations élémentaires sur les séries	57
2.2.2 Opérations élémentaires sur les séries partielles	58
2.2.3 Autres opérations	58
2.3 Séries de plusieurs variables	60
2.4 Conclusion	62

II Etude théorique et pratique des séries de Chebyshev	63
3 Séries de Chebyshev et équations différentielles	65
3.1 Introduction : rappels	65
3.1.1 Equations différentielles holonomes	65
3.1.2 Séries de Chebyshev	66
3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev	67
3.2.1 Séries de Chebyshev sur un segment $[a, b]$	74
3.3 Séries de Chebyshev et opérateurs différentiels	77
3.3.1 Le schéma général	77
3.3.2 Utilisation de la relation de structure	83
3.4 Autres propriétés	85
3.4.1 Produit de polynômes de Chebyshev	85
3.4.2 Intégration des séries de Chebyshev	92
3.4.3 Dérivation dans la base de Chebyshev	93
3.4.4 Composition de polynômes de Chebyshev	93
3.5 Conclusion	95
4 Etude de la récurrence de Chebyshev	97
4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev	98
4.1.1 Remarques préliminaires sur la récurrence de Chebyshev	98
4.1.2 Propriétés des opérateurs élémentaires	100
4.1.3 Un regard nouveau sur d'autres méthodes	102
4.1.4 Forme polynomiale de la récurrence de Chebyshev	108
4.2 Divers travaux autour de la récurrence de Chebyshev	112
4.2.1 Factorisation des récurrences de Chebyshev	112
4.2.2 Inversion de la récurrence de Chebyshev	116
4.2.3 Séries de Chebyshev Holonomes	118
4.3 Conclusion	123
5 Solutions de Chebyshev formelles d'une EDO	125
5.1 Introduction	125
5.2 Exemples	127
5.2.1 Cas des fractions rationnelles	127
5.2.2 Autres exemples	128
5.3 Etude des solutions formelles : approche indirecte	129
5.3.1 Equations aux différences-Equations différentielles	130
5.3.2 Polygone de Newton d'un opérateur différentiel	131
5.3.3 Un théorème de Ramis	132
5.3.4 Application aux séries de Chebyshev	134
5.3.5 En résumé	135
5.4 Polygone de Newton-Chebyshev	135
5.4.1 Transformée de Mellin de \mathfrak{L}	136
5.4.2 Polygone de Newton de \hat{L}	138
5.4.3 Définition du polygone de Newton-Chebyshev	142
5.5 Forme explicite de solutions formelles	143
5.6 Resommation de séries de Chebyshev	148

5.6.1	Resommation par prolongement analytique	148
5.6.2	Resommation par le procédé de Borel-Laplace	150
5.7	Conclusion	153
6	Application à la résolution numérique des équations différentielles	155
6.1	Une méthode de résolution	155
6.1.1	La τ -méthode de Lanczos	161
6.1.2	Analyse d'erreur a posteriori	162
6.1.3	Convergence	162
6.1.4	Remarques sur la méthode	165
6.2	Applications et exemples	167
6.2.1	Intégration sur un chemin	167
6.2.2	Systèmes différentiels	168
6.2.3	Singularités irrégulières	170
6.2.4	Equations non-linéaires	171
6.3	Problème de Cauchy et approximation rationnelle	174
6.3.1	Approximant global	174
6.3.2	Approximation rationnelle : les τ -fractions	177
6.4	Conclusion	183
Conclusion		185

Notations

Nous reportons ici certaines des notations les plus usitées dans ce mémoire. La liste qui suit permet un rappel de notation en cours de lecture mais ne se substitue pas à une définition de chaque item dans le texte.

Dérivations et opérateurs différentiels :

∂_x	$\frac{d}{dx}$	dérivation ordinaire
θ_x	$x \frac{d}{dx}$	dérivation d'Euler
Θ_x	$(x^2 - 1) \frac{d}{dx}$	
$\Psi_{k,x}$	$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} + (2k + 1)x$	
$\Phi_{k,x}$	$(x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + (2k + 1)x \frac{d}{dx}$	

Opérateurs aux différences :

I	$I(a_n) = a_n$	opérateur d'identité
E	$E(a_n) = a_{n+1}$	opérateur de décalage

Opérateurs aux différences associés aux séries de Chebyshev :

Δ	$\frac{E^{-1} - E}{2n}$
∇	$(n - 1)E^{-1} + (n + 1)E$
X_0	$\frac{E + E^{-1}}{2}$
X_k	$\frac{(n + k)E + (n - k)E^{-1}}{2n}$

Remarque : on notera la définition des opérateurs Δ et ∇ qui ne représentent pas ici, contrairement à un usage assez répandu dans la littérature sur les opérateurs aux différences, les dérivées discrètes : $E - I$ et $I - E^{-1}$.

Fonctions définies sur \mathbb{C} :

$$\begin{aligned}
 w & z \mapsto \frac{z + z^{-1}}{2} \\
 v & z \mapsto \frac{z - z^{-1}}{2} \\
 l & z \mapsto |z - 1| + |z + 1| \\
 r & z \mapsto \frac{l(z) + \sqrt{l(z)^2 - 4}}{2}
 \end{aligned}$$

\mathbb{M} désigne l'ensemble des fonctions analytiques sur \mathbb{C} sauf en un nombre fini de points.

Autres notations :

$$\begin{aligned}
 \delta_{n,m} & 1 \text{ si } m = n ; 0 \text{ sinon} & \text{symbole de Kronecker} \\
 (a)_n & a(a+1)\dots(a+n-1) & \text{notation de Pochhammer} \\
 n!! & 1.3.5\dots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!} & \\
 \mathcal{M} & & \text{transformation de Mellin}
 \end{aligned}$$

Introduction

Le travail présenté de ce mémoire de thèse se propose d'étudier divers problèmes mathématiques et algorithmiques liés à la recherche de séries de Chebyshev solutions d'une équation différentielle holonome générique

$$Ly = p_r(x)y^{(r)} + \cdots + p_k(x)y^{(k)} + \cdots + p_0(x)y = q(x) . \quad (1)$$

Le qualificatif *holonome* prend différents sens selon les contextes mathématiques : dans ce mémoire il signifiera *linéaire à coefficients polynomiaux* et qualifiera aussi bien une équation différentielle que l'opérateur différentiel associé. La recherche des solutions de l'équation (1) à l'aide de séries de **Taylor** est bien maîtrisée : sur le plan théorique par les résultats d'existence d'une base de solutions formelles connus depuis le siècle dernier depuis les travaux de Fabry et Poincaré jusqu'aux résultats plus récents sur la resommation des solutions formelles en "vraies" solutions de l'équation différentielle (Balser, Braaksma, Ecalle, Ramis ...) ; et sur le plan algorithmique depuis la manipulation des séries de Taylor maintenant traitée par la plupart des systèmes de calcul formel modernes jusqu'au calcul effectif des solutions formelles (programmes DESIR, DESIR2, ISOLDE et autres) issu des méthodes de polygones de Newton. Les séries de **Chebyshev** sont moins richement dotées de résultats pour la même problématique : nous avons donc voulu contribuer à la recherche de tels résultats.

Le premier problème rencontré dans notre recherche réside dans la capacité à appliquer un opérateur différentiel à une série de Chebyshev d'une manière algorithmique comme on sait le faire pour les séries de Taylor. C'est l'objet de la première partie. La méthode que nous avons mise au point s'est avérée être très naturellement généralisable à une plus grande classe de séries. Cette généralisation est présentée dans la première partie de ce mémoire où nous donnons une méthode pour faire agir un opérateur différentiel sur une série développée suivant une famille de polynômes hypergéométriques. Les polynômes hypergéométriques vérifient des équations différentielles particulières qui leur confèrent un grand nombre de propriétés que nous pouvons "transmettre" aux séries correspondantes. Parmi les polynômes hypergéométriques se trouvent les polynômes orthogonaux classiques dont les polynômes de Chebyshev. Le premier chapitre présente les résultats théoriques qui permettent un travail algorithmique avec les séries de polynômes hypergéométriques et en particulier d'effectuer des opérations différentielles sur celles-ci. Dans le chapitre 2 nous indiquons nos choix de représentation informatique des séries et des opérations qui ont abouti au programme *orthoserie* développé en MAPLE et qui permet la mise en oeuvre

effective des propriétés étudiées théoriquement dans le premier chapitre.

La seconde partie est consacrée plus spécifiquement aux séries de Chebyshev. Les raisons de l'intérêt particulier porté aux séries de Chebyshev sont exposées dans le premier chapitre de cette partie. Cet intérêt provient des propriétés d'approximation des séries de Chebyshev dont les sommes partielles fournissent des approximants polynomiaux quasi-optimaux pour la norme uniforme sur un segment. Un ensemble d'autres propriétés vient de plus valider du point de vue analytique les procédés formels issus de la première partie. L'aboutissement de cette validation est la construction d'une équation récurrente, que nous appelons *récurrence de Chebyshev*, vérifiées par les coefficients de Chebyshev des solutions de l'équation (1).

Dans le chapitre 4, nous étudions la structure de la récurrence de Chebyshev. Cette étude met en évidence des propriétés qui seront utilisées par la suite tant pour le traitement informatique que pour l'étude théorique des solutions de la récurrence de Chebyshev. Après ces considérations, nous traitons d'une part le problème de factorisation de la récurrence de Chebyshev qui, parfois, n'est pas minimale - dans un sens à définir - et d'autre part quelques problèmes inverses associées à la récurrence de Chebyshev : comment reconstruire l'équation différentielle qui a engendré la récurrence ? comment construire une récurrence qui ait une solution donnée ? Les réponses à ces problèmes sont appréhendées de manière constructive, suggérant de façon immédiate la programmation que nous en avons faite dans le langage MAPLE.

Le chapitre 5 soulève l'interrogation principale que suscite la récurrence de Chebyshev et fournit des réponses suivant différents axes. La structure de la récurrence de Chebyshev étudiée précédemment indique que celle-ci est d'ordre au moins $2r$ lorsqu'elle est engendrée par une équation différentielle d'ordre r . Ce qui signifie toute solution de la récurrence de Chebyshev ne constitue pas la suite des coefficients de Chebyshev d'une solution de l'équation différentielle. La question que nous nous posons est donc la nature de ces solutions surnuméraires auxquels nous associons des séries de Chebyshev formelles divergentes. Dans un premier temps, nous étudions le comportement asymptotique des solutions formelles. Pour cela, nous utilisons des outils et des résultats issus de l'étude asymptotique Gevrey pour les séries de Taylor. Notamment, nous définissons un polygone de Newton-Chebyshev qui permet de déterminer à partir de l'équation différentielle le caractère Gevrey des solutions formelles d'une manière très directe. Le comportement asymptotique des solutions formelles même s'il constitue une information importante (y compris dans l'analyse des méthodes numériques associées à la récurrence de Chebyshev) ne marque néanmoins pas le lien entre les solutions formelles et les fonctions solutions de l'équation différentielle. Ce lien est établi grâce à une représentation intégrale de certaines solutions formelles, qui fait intervenir explicitement une fonction solution de l'équation différentielle. La corrélation entre l'augmentation du nombre de solutions formelles et les degrés des polynômes coefficients de l'équation différentielle est interprétée en terme de secteurs de décroissance exponentielle que l'on peut déterminer explicitement à l'aide de la construction d'une base de solutions formelles (aux sens de Fabry) à l'infini de l'équation. Une autre façon de relier solutions formelles et fonctions solutions consiste à appliquer aux premières une méthode de resommation pour faire réapparaître des fonctions solutions. Divers procédés sont examinés.

Enfin, dans le dernier chapitre nous revenons au problème de résolution numérique de

Introduction

l'équation différentielle. Grâce aux outils informatiques présentés dans la première partie et programmés en MAPLE, la mise en oeuvre de méthodes de résolution se trouve grandement simplifiée et facilement adaptable. Nous avons essentiellement étudié une τ -méthode que nous avons expérimentée dans une grande gamme de problèmes (intégration sur un contour, problèmes aux limites, systèmes linéaires etc ...). L'usage du calcul formel permet de plus d'obtenir en modifiant τ -méthode des approximations rationnelles pour les solutions d'un problème de Cauchy.

Première partie

Approche algorithmique des séries
orthogonales

Chapitre 1

Séries orthogonales

Le but de ce chapitre est de présenter une méthode générale pour appliquer un opérateur différentiel à une série développée suivant une famille de polynômes orthogonaux classiques. D'une manière brachylogique, nous dirons une *série orthogonale* pour désigner une telle série. En fait, le résultat qui sera établi concerne la classe plus large des séries de polynômes hypergéométriques. Cette approche plus générale conferera une plus grande unité à la présentation même si l'orthogonalité est souvent requise dans les applications.

1.1 Opérations formelles sur les séries de fonctions

Dans la recherche de solutions d'une équation différentielle sous la forme de séries de Chebyshev ou plus généralement de séries orthogonales, nous sommes confrontés au problème d'appliquer, d'une manière simple et algorithmique, un opérateur différentiel à de telles séries. Nous en avons tiré des principes généraux relatifs aux opérations formelles sur les séries de fonctions. Nous allons présenter ces résultats.

1.1.1 Exemple introductif : les séries de Taylor

L'application d'un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux à une série de Taylor est une tâche fondamentale à la base de diverses applications : DESIR [19] et DESIR2 [53] pour la recherche des solutions formelles d'une équation différentielle holonomie, ISOLDE dans le même but mais avec des systèmes ou NODES [13] pour la recherche de solutions de systèmes non-linéaires quasi-monomiaux. Cette opération est relativement élémentaire (mais pas les applications sus-mentionnées) et découle des deux formules suivantes

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n \quad (a_{-1} = 0) \quad (1.1)$$

et

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n. \quad (1.2)$$

Pour certaines applications telles que NODES, il faut ajouter le produit de deux séries de Taylor dont le résultat est encore une série de Taylor avec des coefficients obtenus par produit de Cauchy. Grâce à une utilisation répétée des deux formules précédentes,

nous pouvons facilement exprimer le résultat de l'application d'un opérateur différentiel holonome quelconque à une série de Taylor.

Exemple 1 Considérons l'opérateur différentiel

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + (3 + x) \frac{d}{dx} - 7x .$$

Alors en utilisant les formules précédentes nous établissons que

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-7a_{n-1} + na_n + 3(n+1)a_{n+1} + (n+1)(n+2)a_{n+2}) x^n .$$

Cet exemple montre qu'une opération (ici différentielle) sur une série de Taylor s'est traduite par une opération sur les coefficients de celle-ci. Ce phénomène est fréquent avec les séries de fonctions mais la locution "opération sur les coefficients", assez vague, doit être précisée dans un cadre théorique.

1.1.2 Opérateurs aux différences

Définition 1

- || On note \mathbb{S} l'ensemble des fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{C} .
- || On note \mathbb{F} l'ensemble des opérateurs de \mathbb{S} dans \mathbb{S} .

Nous avons nommé ainsi l'ensemble \mathbb{S} car nous pouvons l' identifier à l'ensemble des suites indexées sur \mathbb{Z} et à valeurs dans \mathbb{C} , de sorte que la suite des coefficients d'une série de fonctions peut être considérée comme un élément de \mathbb{S} . De ce fait, les éléments de \mathbb{F} représentent les "opérations sur les coefficients". Néanmoins, \mathbb{F} est un ensemble un peu grand pour nos besoins et, chose plus grave, tous les éléments de \mathbb{F} ne sont pas calculables. Nous allons donc nous restreindre à un sous-ensemble de \mathbb{F} : l'ensemble des opérateurs aux différences. Avant d'en donner une définition, nous soulignons le fait que \mathbb{F} présente une structure d'algèbre naturelle pour la somme et le produit (qui est en fait une composition) définis comme suit pour $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ et $f \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} (F_1 +_{\mathbb{F}} F_2)f &= F_1 f +_{\mathbb{S}} F_2 f \\ (F_1 \times_{\mathbb{F}} F_2)f &= F_1(F_2 f) \end{aligned}$$

avec pour unité l'opérateur d'identité noté I .

Définition 2

- || Nous appelons opérateur aux différences, un opérateur D telle que

$$\begin{aligned} D &: \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S} \\ f &\longmapsto Df \end{aligned}$$

où Df est défini par

$$Df(n) = \sum_{k=r}^s d_k(n) f(n+k) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r, s \in \mathbb{Z} \\ d_k \in \mathbb{S}, k = r \dots s \end{cases}$$

- || L'ensemble des opérateurs aux différences est noté \mathbb{D} .

1.1 Opérations formelles sur les séries de fonctions

Remarque 1 Nous avons adopté une définition restreinte des opérateurs aux différences, mais suffisante dans le contexte de ce mémoire, puisqu'en toute généralité un opérateur aux différences agit sur des fonctions de la variable complexe.

On vérifie aisément que \mathbb{D} est stable pour la somme et le produit de \mathbb{F} et que l'opérateur I appartient à \mathbb{D} . L'ensemble \mathbb{D} est donc une sous-algèbre de \mathbb{F} .

Il est souhaitable de donner une représentation simple des éléments de \mathbb{D} qui facilite les calculs avec ceux-ci. Pour cela introduisons certains opérateurs particuliers à partir desquels nous construirons tous les autres. L'opérateur de décalage (*shift operator*) noté assez couramment E ainsi que son opérateur réciproque E^{-1} sont définis respectivement par

$$Ef(n) = f(n+1) \quad \text{et} \quad E^{-1}f(n) = f(n-1).$$

Les opérateurs E^k se définissent alors récursivement, pour tout entier k , par

$$E^0 = I, \quad E^{k+1} = E \cdot E^k \quad \text{et} \quad E^{k-1} = E^{-1} \cdot E^k.$$

A toute fonction f de \mathbb{S} on associe injectivement l'opérateur \widehat{f} de \mathbb{D} qui à toute fonction g de \mathbb{S} associe la fonction $\widehat{f}g$ définie par

$$(\widehat{f}g)(n) = f(n)g(n).$$

Ainsi tout opérateur aux différences F s'écrit de manière synthétique sous la forme

$$F = \sum_{k=r}^s \widehat{f}_k E^k. \quad (1.3)$$

Il est habituel d'abuser des notations en écrivant plutôt l'opérateur F sous la forme suivante

$$F = \sum_{k=r}^s f_k(n) E^k. \quad (1.4)$$

Cet abus est pratique en ce qu'il allège les notations comme nous le verrons plus bas et parce qu'il fait apparaître la variable (ici n) sur laquelle agit l'opérateur de décalage.

Il peut être utile d'écrire un opérateur aux différences sous forme d'une somme (faussement) infinie

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(n) E^k \quad (1.5)$$

où seul un nombre fini de fonctions f_k sont non identiquement nulles. Nous définissons alors, par analogie avec les polynômes, le degré et la valuation d'un opérateur aux différences.

Définition 3

Nous appellons valuation de l'opérateur F défini par (1.5), la quantité

$$d^-(F) = \min\{k \mid f_k \text{ non identiquement nul}\}$$

et degré de F la quantité

$$d^+(F) = \max\{k \mid f_k \text{ non identiquement nul}\}$$

Enfin, l'ordre de l'opérateur F est défini par

$$\text{ord}(F) = d^+(F) - d^-(F).$$

De cette manière, la somme S des deux opérateurs

$$F = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(n) \mathbf{E}^k \quad \text{et} \quad G = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(n) \mathbf{E}^k$$

s'écrit très simplement

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f_k(n) + g_k(n)) \mathbf{E}^k \quad (1.6)$$

avec

$$\begin{aligned} d^-(S) &\geq \min(d^-(F), d^-(G)) , \\ d^+(S) &\leq \max(d^+(F), d^+(G)) . \end{aligned}$$

De la même façon, le produit P de F et G s'écrit

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(n) g_{k-l}(n+l) \right) \mathbf{E}^k$$

avec

$$\begin{aligned} d^-(P) &\geq d^-(F) + d^-(G) , \\ d^+(P) &\leq d^+(F) + d^+(G) . \end{aligned}$$

Les deux inégalités précédentes peuvent se remplacer par des égalités si les coefficients de F et G appartiennent à une sous-algèbre intègre de \mathbb{S} . C'est, en particulier, le cas pour les opérateurs à coefficients polynomiaux ou rationnels en n que nous rencontrerons par la suite.

1.1.3 Séries formelles de fonctions

Les séries de fonctions sont un outil fondamental des mathématiques, dont une utilisation majeure est la représentation des fonctions. Nous pouvons citer les séries de Taylor pour représenter les fonctions analytiques au voisinage d'un point donné ou les séries de Fourier pour représenter des fonctions périodiques. L'avantage de ces développements est de faciliter les opérations sur les fonctions. En particulier, les opérations linéaires peuvent être effectuées termes à termes moyennant certaines précautions vis-à-vis de la convergence. Nous parlerons de série formelle pour désigner l'objet mathématique usuel mais sans considération de convergence et sur lequel les opérations sont effectuées "comme si" elles étaient légitimes en termes de convergence. Ces opérations seront elles-mêmes dites formelles. Donnons une définition puis une proposition qui sera la base du calcul sur les séries formelles.

Définition 4 Opérateur adjoint

Soit $F \in \mathbb{D}$,

$$F = \sum_{k=r}^s f_k(n) \mathbf{E}^k .$$

Nous appellenons opérateur adjoint de F et nous notons F^* , l'opérateur

$$\sum_{k=-s}^{-r} f_{-k}(n+k) \mathbf{E}^k .$$

Il est facile de voir que l'application qui, à un opérateur aux différences, associe son adjoint est une application linéaire. Bien que cette application ait d'autres propriétés intéressantes, nous n'aurons à utiliser que la linéarité.

Proposition 1

Soit $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites de \mathbb{S} et $F \in \mathbb{D}$. Alors

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n F(b_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^*(a_n) b_n$$

Démonstration :

La démonstration consiste en la réécriture suivante

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n F(b_n) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=r}^s f_k(n) b_{n+k} \right) \\ &= \sum_{k=r}^s \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n f_k(n) b_{n+k} \\ &= \sum_{k=r}^s \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_k(n-k) a_{n-k} b_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-s}^{-r} f_{-k}(n+k) a_{n+k} \right) b_n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^*(a_n) b_n . \end{aligned}$$

□

Lorsqu'une opération f est linéaire, nous pouvons la faire agir terme à terme sur une série formelle

$$f \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n P_n(x) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f(P_n(x))$$

Si, de plus, l'opérateur f agit de façon particulière (mais très répandue en pratique) sur les fonctions P_n nous avons la

Proposition 2

Soit $\{P_n(x)\}$ une suite de fonctions et f un opérateur linéaire agissant sur les P_n . Supposons qu'il existe une suite de fonctions $\{Q_n(x)\}$ et un opérateur aux différences F tels que

$$f(P_n(x)) = F(Q_n(x)) \quad (1.7)$$

alors nous avons

$$f \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n P_n(x) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F^*(a_n) Q_n(x) .$$

Démonstration :

Ce résultat est l'application de la proposition 1 pour $b_n = Q_n(x)$. \square

Nous avons utilisé des séries avec des indices variant de $-\infty$ à ∞ . Il est plus usuel, et ce sera le cas par la suite, d'avoir une indexation de 0 à ∞ . La proposition 2 s'applique à ces séries moyennant la convention $a_n = 0$, $P_n \equiv 0$ et $Q_n \equiv 0$ pour n négatif. Et nous aurons alors sous les mêmes hypothèses que celles de la proposition 2

$$f \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} F^*(a_n) Q_n(x) .$$

1.1.4 La transformation de Mellin formelle

Revenons aux séries de Taylor avec l'éclairage donné par les résultats précédents. Les deux opérateurs linéaires que sont la multiplication par la variable et la dérivation par rapport à celle-ci vérifient les hypothèses de la proposition 2, en effet

$$x \cdot x^n = E x^n \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} = n E^{-1} x^n .$$

Comme $E^* = E^{-1}$ et $(n E^{-1})^* = (n+1)E$, par application de la proposition 2, nous rétablissons les formules (1.1) et (1.2), à savoir

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} E^{-1}(a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

et

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) E(a_n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n .$$

Soit l'opérateur différentiel holonom

$$L = p_r(x) \frac{d^r}{dx^r} + \cdots + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) .$$

Par linéarité et compositions d'opérateurs nous obtenons facilement que

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(a_n) x^n \quad (1.8)$$

où l'opérateur aux différences \mathcal{L} vaut

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^r p_k(E^{-1})((n+1)E)^k. \quad (1.9)$$

Par construction, l'opérateur \mathcal{L} est un élément de l'algèbre $\mathbb{C}[n, E, E^{-1}]$ des opérateurs aux différences à coefficients polynomiaux en n . Nous introduisons la dérivation d'Euler $\theta_x = x \frac{d}{dx}$. Il est alors facile de vérifier que $\mathbb{C}[x, x^{-1}, \frac{d}{dx}]$ aussi bien que $\mathbb{C}[x, x^{-1}, \theta_x]$ forment l'algèbre des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynomiaux en x et x^{-1} . Nous allons mettre en correspondance les deux algèbres précitées par le biais d'un isomorphisme appelé transformation de Mellin formelle. Une définition de la transformation de Mellin formelle est donnée dans [4] où elle désigne un isomorphisme de $\mathbb{C}[n, E]$ sur $\mathbb{C}[x, \theta_x]$. Nous avons adapté cette définition à nos besoins. D'une part, la transformation "directe" va, pour nous, des opérateurs différentiels vers les opérateurs aux différences (et serait la transformation "inverse" au sens de [4]). D'autre part, nous ajoutons un opérateur élémentaire à chaque algèbre, E^{-1} et x^{-1} , afin de prendre en compte des opérateurs aux différences avec des décalages négatifs.

Proposition 3 Transformation de Mellin formelle

$$\left\| \begin{array}{l} \text{La correspondance} \\ \begin{array}{rcl} x & \mapsto & E^{-1} \\ x^{-1} & \mapsto & E \\ \theta_x & \mapsto & n \end{array} \\ \text{définit un isomorphisme d'algèbre } \mathcal{M} \text{ de } \mathbb{C}[x, x^{-1}, \theta_x] \text{ sur } \mathbb{C}[n, E, E^{-1}]. \end{array} \right.$$

Démonstration :

S'il est "bien défini", l'opérateur \mathcal{M} est par construction un isomorphisme. Il sera bien défini, si l'image d'un opérateur ne dépend pas de son écriture. Cela revient à vérifier de \mathcal{M} est compatible avec les règles de commutation. Eliminons les évidences : puisque x et x^{-1} commutent ainsi que E et E^{-1} , nous avons

$$\mathcal{M}(xx^{-1}) = \mathcal{M}(x)\mathcal{M}(x^{-1}) = E^{-1}E = EE^{-1} = \mathcal{M}(x^{-1})\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}(x^{-1}x).$$

Par ailleurs, du coté différentiel nous avons les règles de commutation

$$\begin{aligned} x\theta_x &= (\theta_x - 1)x, \\ x^{-1}\theta_x &= (\theta_x + 1)x^{-1}. \end{aligned}$$

Or nous pouvons effectuer la suite de calculs suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(x\theta_x) &= \mathcal{M}(x)\mathcal{M}(\theta_x) = E^{-1}n = (n-1)E^{-1} \\ &= \mathcal{M}(\theta_x - 1)\mathcal{M}(x) = \mathcal{M}((\theta_x - 1)x) \\ \mathcal{M}(x^{-1}\theta_x) &= \mathcal{M}(x^{-1})\mathcal{M}(\theta_x) = En = (n+1)E \\ &= \mathcal{M}(\theta_x + 1)\mathcal{M}(x^{-1}) = \mathcal{M}((\theta_x + 1)x^{-1}) \end{aligned}$$

qui constitue la vérification voulue. □

La transformée de Mellin est un outil à la fois simple et puissant pour formaliser la correspondance entre opérateurs différentiels et opérateurs aux différences bien connue

depuis longtemps (voir par exemple les travaux de Pincherle [54]). Nous avons présenté la transformée de Mellin parce que nous utiliserons cet outil plus loin et aussi parce qu'elle est un modèle que nous voulons adapter à d'autres types de séries, en particulier les séries orthogonales que nous allons définir ci-après.

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux classiques occupent une place importante dans la littérature consacrée aux polynômes orthogonaux (Szegő [61], Freud [26]) et toute “bible” sur les fonctions spéciales leur consacre une partie substantielle (Abramowitz et Stegun [1], Luke [42, 43] ou Erdelyi *et al.* [22]). Nous allons présenter les polynômes orthogonaux classiques tels qu’ils le sont dans l’excellent livre de A. Nikiforov et V. Ouvarov [47], à partir de l’équation hypergéométrique. Ce point de vue a un double avantage : d’une part elle confère aux polynômes orthogonaux classiques une très élégante unité et d’autre part l’équation hypergéométrique et la formule de Rodrigues sous-jacente sont à l’origine de toutes les propriétés qui permettent les opérations formelles sur les séries orthogonales. Commençons par quelques rappels sur les polynômes orthogonaux.

1.2.1 Rappels sur les polynômes orthogonaux

Nous présentons ici les polynômes orthogonaux sur un intervalle relativement à une fonction poids. Il s’agit d’un cas restreint d’orthogonalité. Pour une présentation plus générale, le lecteur pourra se référer à l’ouvrage de T. S. Chihara [10].

Soit un intervalle $]a, b[$ de \mathbb{R} . Nous ne supposons pas $]a, b[$ fini. Soit un fonction $w(x)$ strictement positive sur $]a, b[$. Nous supposons de $w(x) \in L^1(]a, b[)$ et que les moments

$$\int_a^b w(x)x^n dx$$

existent pour tout entier $n \geq 0$ (cette hypothèse étant immédiatement vérifiée si $]a, b[$ est un intervalle fini). Alors l’intégrale

$$\int_a^b w(x)P(x)Q(x) dx$$

existe pour tous polynômes P et Q et définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$ noté $(P, Q)_w$.

Définition 5

On appelle polynômes orthogonaux relativement au poids w , une famille de polynômes $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

- P_n est de degré n ,
- pour tout n et m distincts, P_n et P_m sont orthogonaux relativement au produit scalaire $(., .)_w$ c'est-à-dire que $(P_n, P_m)_w = 0$.

L’existence d’un système de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire donné se démontre de façon constructive en orthogonalisant le système $\{1, x, x^2, \dots\}$ par le procédé de Gram-Schmidt. Pour plus de détails, voir par exemple l’ouvrage de Szegő [61].

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

Proposition 4

|| Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[x]$ de degré m et $\{P_n\}$ une famille orthogonale. Alors

$$\left\| Q(x) = \sum_{n=0}^m \lambda_n P_n(x) \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \frac{(P_n, Q)_w}{(P_n, P_n)_w} \right. .$$

Démonstration :

Puisque qu'une famille de polynômes orthogonaux est "étagée" en degré, nous savons que la suite $\{P_n\}_{n=0..m}$ constitue une base de l'espace $\mathbb{R}_m[x]$ des polynômes de degré au plus m . Ainsi si $Q \in \mathbb{R}_m[x]$ alors il existe des coefficients $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ tels que

$$Q(x) = \sum_{n=0}^m \lambda_n P_n(x) .$$

Pour tout n , $0 \leq n \leq m$, calculons le produit scalaire

$$(P_n, Q)_w = \sum_{k=0}^m \lambda_k \underbrace{(P_k, P_n)}_{\text{nul si } k \neq n} = \lambda_n (P_n, P_n)_w .$$

Ce qui prouve le résultat énoncé. □

Corollaire 1

|| Le polynôme P_m est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à m .

Démonstration :

Soit Q un polynôme de degré strictement inférieur à m . Alors

$$(P_m, Q)_w = \sum_{n=0}^{m-1} \lambda_n \underbrace{(P_m, P_n)_w}_0 = 0 .$$

□

Une autre conséquence de la proposition 4 est le résultat très important suivant

Proposition 5 Unicité des polynômes orthogonaux

|| Soit deux familles $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ orthogonales sur un même segment $]a, b[$ relativement au même poids w . Alors les deux familles sont identiques à une normalisation près i.e. qu'il existe des constantes c_n telles que pour tout n , $Q_n(x) = c_n P_n(x)$.

Démonstration :

D'après la proposition 4 le polynôme Q_n se décompose sous la forme

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) \quad \text{avec} \quad \lambda_k = \frac{(P_k, Q_n)_w}{(P_k, P_k)_w} .$$

Or d'après le corollaire 1, pour tout $k < n$ $(P_k, Q_n)_w = 0$ puisque Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à n . Il reste donc que $Q_n = \lambda_n P_n$, ce qui prouve le théorème en prenant $c_n = \lambda_n$. □

Nous donnons maintenant une propriété caractéristique des polynômes orthogonaux.

Proposition 6 Réurrence à trois termes

Pour toute famille de polynômes orthogonaux $\{P_n\}$, il existe $\{\alpha_1(n)\}$, $\{\alpha_0(n)\}$ et $\{\alpha_{-1}(n)\}$ telles que

$$xP_n(x) = \alpha_1(n)P_{n+1}(x) + \alpha_0(n)P_n(x) + \alpha_{-1}(n)P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (1.10)$$

avec la convention $P_{-1} \equiv 0$.

Démonstration :

Prenons pour valeur de $\alpha_1(n)$ le rapport du coefficient dominant de P_n sur le coefficient dominant de P_{n+1} . Il est alors clair que

$$xP_n - \alpha_1(n)P_{n+1}$$

est un polynôme de degré n au plus. Ainsi

$$xP_n - \alpha_1(n)P_{n+1} = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k.$$

Or, en utilisant le fait que $(p(x)q(x), r(x))_w = (p(x), q(x)r(x))_w$, il vient

$$(xP_n - \alpha_1(n)P_{n+1}, P_k) = (P_n, xP_k) - \alpha_1(n)(P_{n+1}, P_k)$$

et par application du corollaire 1 ce produit scalaire est nul si xP_k est de degré strictement inférieur à n donc si $k < n - 1$. Cela implique que $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-2} = 0$. Nous établissons la relation (1.10) en prenant $\alpha_0(n) = \lambda_n$ et $\alpha_{-1}(n) = \lambda_{n-1}$. \square

L'intérêt de séries développées suivant des fonctions orthogonales est grand pour les propriétés d'approximation que confère l'orthogonalité et pour la mise en oeuvre d'un grand nombre de méthodes de l'analyse numérique, en particulier les méthodes spectrales. Par ailleurs, la proposition 6 nous assure que de telles séries se multiplient aisément par la variable *via* l'action d'un opérateur aux différences sur ses coefficients. Néanmoins, notre but étant d'appliquer un opérateur différentiel à une série, il faudrait sinon que la famille de polynômes orthogonaux correspondante soit stable par dérivation, du moins que la famille formée par les dérivées soit orthogonale. Or il a été démontré au début du siècle (Hahn [31] et Krall [34]) que les seuls polynômes orthogonaux dont les dérivées sont encore des polynômes orthogonaux sont les polynômes orthogonaux classiques. Et parmi ceux-ci, seuls les polynômes d'Hermite sont stables par dérivation.

Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux classiques sont les polynômes de Jacobi, polynômes de Laguerre et les polynômes d'Hermite dont les intervalles d'orthogonalité et les fonctions poids associées sont données dans le tableau suivant :

	$]a, b[$	poids	paramètres
Jacobi	$]-1, 1[$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\alpha > -1, \beta > -1$
Laguerre	$]0, \infty[$	$x^\alpha e^{-x}$	$\alpha > -1$
Hermite	$]-\infty, \infty[$	e^{-x^2}	

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

Mais une telle présentation des polynômes orthogonaux classiques ne souligne guère les liens qui les unissent. Ces liens vont apparaître dans l'approche par la théorie des polynômes hypergéométriques.

1.2.2 Polynômes hypergéométriques

Considérons la famille d'équations différentielles dites hypergéométriques

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \quad (1.11)$$

où $\sigma(x)$ est un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ de degré au plus 2, $\tau(x)$ un polynôme de degré au plus 1 et λ est une constante complexe. L'équation (1.11) peut être écrite sous la forme auto-adjointe,

$$(\sigma\rho y')' + \lambda\rho y = 0 \quad (1.12)$$

où la fonction ρ vérifie l'équation différentielle, dite équation de Pearson,

$$(\sigma\rho)' = \tau\rho. \quad (1.13)$$

La proposition suivante établit l'existence pour tout couple (σ, τ) de valeurs de λ pour lesquelles l'équation 1.11 a une solution polynomiale.

Proposition 7 Formule de Rodrigues [47, p.24]

Supposons que la quantité

$$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$$

soit non nulle pour tout autre entier naturel que 0. Alors l'équation différentielle hypergéométrique (1.11) possède une solution polynomiale P_n , dite polynôme (du type) hypergéométrique, de degré n pour $\lambda = \lambda_n$. Cette solution est donnée explicitement par la formule

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x)\sigma^n(x)] \quad (1.14)$$

où B_n est un coefficient de normalisation et ρ une fonction solution de l'équation différentielle (1.12). Cette formule est appelé formule de Rodrigues.

Remarque 2 Des polynômes hypergéométriques existent hors de l'hypothèse formulée sur les λ_n mais la proposition précédente n'est alors plus assurée. Par la suite nous supposerons la condition sur les λ_n toujours vérifiée car elle l'est pour les polynômes orthogonaux classiques. Cette condition implique en particulier que $\tau(x)$ doit être de degré exactement égal à 1.

Nous voyons ainsi qu'une famille de polynômes hypergéométriques est entièrement déterminée par la donnée du triplet

$$(\sigma, \tau, B_n) \quad (1.15)$$

avec un degré de liberté concernant la normalisation. De la formule de Rodrigues nous tirons

$$P_0(x) = B_0 \quad (1.16)$$

$$P_1(x) = B_1 \tau(x) \quad (1.17)$$

(la deuxième égalité est établie à l'aide de l'équation de Pearson). Nous voyons que si $\tau(x)$ n'était pas de degré exactement égal à 1, le polynôme $P_1(x)$ ne le serait pas non plus et la famille serait incomplète.

Une propriété fondamentale des fonctions hypergéométriques et des polynômes hypergéométriques en particulier est que leurs dérivées sont aussi de type hypergéométrique. C'est d'ailleurs cette propriété qui permet d'établir la proposition précédente. Elle se montre facilement en dérivant l'équation (1.11) et posant $z = y'$ pour obtenir

$$\sigma(x)z' + (\tau(x) + \sigma'(x))z' + (\lambda + \tau')z = 0 \quad (1.18)$$

Puisque $\tau(x) + \sigma'(x)$ est un polynôme de degré 1 et que $\lambda + \tau'$ est une constante, l'équation (1.18) est hypergéométrique. Et, par construction, si une fonction y vérifie l'équation (1.11) alors y' vérifie l'équation (1.18). Nous donnons alors la proposition suivante¹ qui indique la forme explicite des polynômes dérivés.

Proposition 8 Dérivées des polynômes hypergéométriques

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes hypergéométriques, solutions de l'équation (1.11), alors, pour tout n , P'_n est un polynôme type hypergéométrique solution de l'équation hypergéométrique (1.18). De plus P'_n est défini par la formule de Rodrigues suivante

$$P'_n(x) = \frac{-\lambda_n B_n}{\sigma(x)\rho(x)} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [\rho(x)\sigma^n(x)] \quad (1.19)$$

Comme le polynôme P'_n est de degré $n - 1$ (et nul pour $n = 0$) il est préférable, dans une perspective de clarté des notations, de remettre en adéquation indices et degrés des polynômes en posant $\tilde{P}_n = P'_{n+1}$. La famille de polynômes \tilde{P}_n est alors définie par le triplet

$$(\sigma, \tau + \sigma', -\lambda_{n+1} B_{n+1}) .$$

L'existence d'une formule de Rodrigues pour tout polynôme de type hypergéométrique a des implications fortes. Notamment, un théorème donné dans le livre de Nikiforov et Ouvarov [47, p.34] montre qu'il existe une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux liant 3 polynômes choisis arbitrairement parmi une famille de polynômes du type hypergéométrique et toutes les familles dérivées. Ce théorème est à l'origine de trois relations aux différences-différentielles à partir desquelles nous allons construire les opérations sur les séries orthogonales. Pour chaque famille de polynômes hypergéométriques, ces relations sont entièrement déterminées par le triplet (1.15). Cette remarque nous dispense de distinguer ou de particulariser les différents polynômes hypergéométriques. Néanmoins, avant de présenter les relations différences-différentielles sus-mentionnées, nous allons montrer une relation entre polynômes hypergéométriques et polynômes orthogonaux grâce à laquelle nous pourrons "identifier" les polynômes hypergéométriques.

¹La démonstration est donnée dans le livre de Nikiforov et Ouvarov

1.2.3 Polynômes hypergéométriques et orthogonalité

Nous reproduisons ici un résultat donné et démontré dans le livre de Nikiforov et Ouvarov [47, p.40]. Nous avons légèrement modifié l'énoncé (la démonstration restant essentiellement la même) pour tenir compte de la possibilité d'une orthogonalité limitée à un nombre fini de polynômes.

Théorème 1

Supposons que la fonction ρ (solution de l'équation de Pearson $(\sigma\rho)' = \tau\rho$) vérifie aux extrémités d'un intervalle $]a, b[$ la condition

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a,b} = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, K$$

où K est fini ou non. Alors les polynômes hypergéométriques P_n correspondant aux différentes valeurs de λ_n sont orthogonaux sur $]a, b[$ par rapport à ρ i.e.

$$\int_a^b \rho(x)P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \text{si } \lambda_n \neq \lambda_m \text{ et } n + m \leq K \quad .$$

Remarque 3 La condition $\lambda_n \neq \lambda_m$ pourra être remplacée par $n \neq m$ lorsque la fonction $n \mapsto \lambda_n$ est injective sur $\{0, 1, 2, \dots, K\}$.

Nous ferons grand usage de ce théorème, ainsi que de la remarque qui l'accompagne, dans la section suivante.

1.2.4 Identification des polynômes hypergéométriques

Nous allons montrer que les polynômes orthogonaux classiques sont des polynômes hypergéométriques, ce qui nous permettra d'une part de mettre en exergue la profonde unité qui relie ces polynômes et d'autre part d'en déduire un faisceau de propriétés. Pour établir ce résultat nous allons procéder à l'étude exhaustive des polynômes solutions d'une équation hypergéométrique à coefficients réels. Au cours de cette étude nous montrerons les propriétés d'orthogonalité de certaines familles hypergéométriques en appliquant le théorème 1. Lorsque qu'une famille sera orthogonale sur le même intervalle et relativement au même poids qu'une famille orthogonale classique, les deux familles seront, en vertu de la propriété d'unicité, identiques à une normalisation près. Au cours de notre étude nous allons donc trouver les polynômes orthogonaux classiques mais aussi d'autres familles de polynômes moins connues bien qu'identifiées au début du siècle par Romanovski [58]. C'est pour prendre en compte ces polynômes que nous avons adapté le théorème 1 pour en affaiblir les hypothèses par rapport à la version originale donnée dans [47].

L'étude exhaustive que nous avons annoncée consiste à étudier les solutions polynomiales que l'équation

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0 \quad .$$

pour tous les cas possibles de couples (σ, τ) où σ est un polynôme réel de degré au plus deux et τ est un polynôme réel de degré au plus un. Dans cette étude, nous supposons vérifiée l'hypothèse de la proposition 7 sur les valeurs λ_n associée à chaque couple (σ, τ) , ce qui détermine les solutions polynomiales grâce à la formule de Rodrigues et ce qui implique conformément à la remarque 2 que le polynôme τ est de la forme

$$\tau(x) = cx + d \quad \text{avec } c \neq 0 \quad .$$

La forme du polynôme τ étant relativement fixée, l'étude va consister à distinguer les différents cas en fonction du nombre de racines de σ . Comme nous pouvons diviser l'équation hypergéométrique par une constante réelle non nulle arbitraire sans en changer les solutions, la valeur du coefficient de tête de σ est sans importance et nous la poserons suivant les cas égale à 1 ou -1 . Pour chaque couple (σ, τ) nous calculerons alors la fonction ρ associée en multipliant l'équation de Pearson (1.12) par σ pour obtenir l'équation différentielle

$$\sigma(\sigma\rho)' = \tau(\sigma\rho)$$

dont les solutions sont de la forme

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \exp \left(\int \frac{\tau}{\sigma} \right) . \quad (1.20)$$

Remarquons que la fonction ρ est définie par (1.20) à une constante multiplicative près (due à l'intégrale indéfinie) que nous fixerons arbitrairement. En effet, il est clair que, quelle que soit la constante choisie, le même polynôme sera donné par la formule de Rodrigues. A partir de la fonction ρ nous pourrons identifier les polynômes.

Pour faciliter la mise en parallèle de l'étude qui suit avec les résultats existant dans la littérature nous utiliserons les notations et conventions "traditionnelles" pour les polynômes orthogonaux classiques et les notations de Romanovski pour les polynômes présentés dans son article.

• **Le polynôme σ a deux racines réelles distinctes a et b**

Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\sigma(x) = (x-a)(b-x)$ avec $a < b$. Une décomposition en éléments simples nous permet d'écrire

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{\alpha+1}{x-a} - \frac{\beta+1}{b-x} \quad \text{avec} \quad \alpha+1 = \frac{ac+d}{a-b} \quad \text{et} \quad \beta+1 = \frac{cb+d}{b-a} .$$

En appliquant la relation (1.20), nous obtenons

$$\rho(x) = C \frac{|x-a|^{\alpha+1} |b-x|^{\beta+1}}{(x-a)(b-x)} . \quad (1.21)$$

La latitude que nous avons sur la valeur (et donc le signe) de la constante C nous permet de simplifier l'expression ci-dessus en

$$\rho(x) = |x-a|^\alpha |b-x|^\beta$$

(en tout rigueur cette simplification n'est valide que sur un intervalle ne contenant ni a ni b ce qui sera le cas par la suite). Nous supprimerons les valeurs absolues plus bas suivant les valeurs des paramètres α et β . En exprimant les coefficient c et d du polynôme τ en fonction de a , b , α et β , nous avons

$$\tau(x) = -(\alpha+\beta+2)x + (ab + \beta a + a + b) .$$

Les cas d'orthogonalité dépendent des signes de α et β .

◊ **Premier cas : $\alpha > -1$ et $\beta > -1$**

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

Nous nous plaçons sur l'intervalle $]a, b[$ sur lequel nous prenons $\rho(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta$. On vérifie aisément que

$$\sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=a} = \sigma(x)\rho(x)x^k|_{x=b} = 0$$

quelque soit k entier. Le théorème 1 implique alors que les polynômes hypergéométriques associés à σ et τ sont orthogonaux sur $[a, b]$ relativement au poids $(x - a)^\alpha (b - x)^\beta$. L'unicité (à un normalisation près) des polynômes orthogonaux nous indique que dans le cas ² où $a = -1$ et $b = 1$, la famille de polynômes déterminée par

$$\begin{cases} \sigma(x) &= 1 - x^2 \\ \tau(x) &= (\alpha + \beta + 2)x + (\alpha - \beta) \\ \rho(x) &= (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta \\ \lambda_n &= n(n + \alpha + \beta + 1) \end{cases}$$

avec la normalisation (dans la formule de Rodrigues)

$$B_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$$

est celle des **polynômes de Jacobi**. Les polynômes de Jacobi sont notés assez traditionnellement $P_n^{(\alpha, \beta)}$. Mais pour éviter la confusion avec la notation désignant un polynôme hypergéométrique générique, nous les noterons $J_n^{(\alpha, \beta)}$. Un cas particulier des polynômes de Jacobi sont les polynômes de Gegenbauer définis par

$$C_n^{(\lambda)} = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + 1/2)_n} J_n^{(\lambda - 1/2, \lambda - 1/2)}.$$

Cette famille de polynômes contient en particulier les polynômes de Legendre, $C_n^{(1/2)}$, et les polynômes de Chebyshev proportionnels à $C_n^{(0)}$. Nous reviendrons longuement sur ces derniers.

◊ **Deuxième cas** : $\alpha < 0$ et $\beta > -1$

Nous nous plaçons sur $]b, +\infty[$ avec $\rho(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta$. Les hypothèses du théorème 1 sont alors vérifiées pour $K = (|\alpha| - \beta - 1)/2$. Dans le cas où $a = 0$, nous obtenons la famille dite des **polynômes de Romanovski de type VI** telle que (en posant $p = -\alpha$ et $q = \beta$ pour reprendre les notations de l'article de Romanovski)

$$\int_b^\infty (x - b)^q x^{-p} P_n P_m dx = 0 \quad n \neq m \text{ et } n + m < \frac{p - q - 1}{2}.$$

◊ **Troisième cas** : $\alpha > -1$ et $\beta < 0$

Ce cas est symétrique au précédent. Nous avons orthogonalité sur $]-\infty, a[$ relativement au poids $(a - x)^\alpha (b - x)^\beta$ avec $K = (|\beta| - \alpha - 1)/2$.

• Le polynôme σ a deux racines complexes conjuguées

Une transformation linéaire³ nous permet de supposer sans perte de généralité que

$$\sigma(x) = x^2 + a^2.$$

²On peut toujours se ramener à ce cas via la transformation $h_{a,b} : x \mapsto \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2}$ que nous retrouverons plus bas

³ $x \mapsto x - b$ si les racines de σ sont, avant transformation, $b \pm ia$

La fonction poids est alors

$$\rho(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \exp \left[\int \left(\frac{cx}{x^2 + a^2} + \frac{d}{x^2 + a^2} \right) \right] = (x^2 + a^2)^{-m} \exp \left[-\nu \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \right]$$

en ayant posé $m = 1 - \frac{c}{2}$ et $\nu = -\frac{d}{a}$ pour reprendre les notations de Romanovski. L'application du théorème 1 permet de retrouver le résultat donné par Romanovski à savoir que les polynômes hypergéométriques associés aux éléments

$$\begin{cases} \sigma(x) &= a^2 + x^2 \\ \tau(x) &= 2(1 - m)x - \nu a \\ \lambda_n &= -n(n + 1 - 2m) \end{cases}$$

sont orthogonaux pour $m, \nu > 0$ avec

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + a^2)^{-m} \exp \left[-\nu \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \right] P_k P_h dx = 0 \quad k \neq h \text{ et } k + h < \frac{2m - 1}{2} .$$

• **Le polynôme σ a une racine double**

Nous avons donc $\sigma(x) = (x - a)^2$. En adoptant les notations de Romanovski, nous avons alors

$$\frac{\tau}{\sigma} = \frac{2 - p}{x - a} + \frac{\gamma}{(x - a)^2} \quad \text{avec} \quad 2 - p = c \quad \text{et} \quad \gamma = d + ac$$

et donc

$$\rho(x) = |x - a|^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x-a}} .$$

En exprimant c et d en fonction de a , α et β nous obtenons

$$\tau(x) = (2 - p)(x - a) + \gamma .$$

A une translation⁴ près tous les polynômes hypergéométriques appartenant au cas étudié, se ramènent à la classe de famille de polynômes hypergéométriques décrits par

$$\begin{cases} \sigma(x) &= x^2 \\ \tau(x) &= (2 - p)x + \gamma \\ \rho(x) &= x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}} \\ \lambda_n &= -n(n + 1 - p) \end{cases} \quad (1.22)$$

et nommés **polynômes de Romanovski de type V** qui vérifient les relations d'orthogonalité

$$\int_0^{\infty} x^{-p} e^{-\frac{\gamma}{x}} P_k P_h dx = 0 \quad k \neq h \text{ et } k + h < \frac{p - 1}{2} . \quad (1.23)$$

Les polynômes décrits par les éléments (1.22) pour $p = 0$, $\gamma = 2$ et la normalisation

$$B_n = \frac{1}{2^n}$$

⁴ $x \mapsto x + a$

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

sont appelés **polynômes de Bessel**. On notera que dans ce cas $\frac{p-1}{2} = 0$ et qu'ainsi les polynômes de Bessel ne vérifient aucune des relations (1.23).

• Le polynôme σ est de degré 1

En toute généralité nous posons $\sigma(x) = x - a$. Nous établissons alors que

$$\frac{\tau}{\sigma} = \beta + \frac{\alpha + 1}{x - a} \quad \text{avec} \quad \beta = c \quad \text{et} \quad \alpha + 1 = d + ac$$

ce qui nous donne une famille de polynômes hypergéométriques définie par les éléments

$$\begin{cases} \sigma(x) &= x - a \\ \tau(x) &= \beta(x - a) + \alpha + 1 \\ \rho(x) &= |x - a|^\alpha e^{\beta x} \\ \lambda_n &= -\beta n \end{cases} . \quad (1.24)$$

et vérifiant des relations d'orthogonalité dans les cas suivants :

◊ $\alpha > -1$ et $\beta < 0$

Sur $]a, +\infty[$ la fonction ρ vaut $(x - a)^\alpha e^{\beta x}$ et vérifie les hypothèses du théorème 1 avec $K = \infty$. En particulier pour $\beta = -1$ et $\alpha > -1$ avec la normalisation

$$B_n = \frac{1}{n!}$$

nous obtenons les polynômes de Laguerre généralisés $L_n^{(\alpha)}$ définis donc par

$$\begin{cases} \sigma(x) &= x \\ \rho(x) &= x^\alpha e^{-x} \\ \tau(x) &= -x + \alpha + 1 \\ \lambda_n &= n \end{cases} .$$

◊ $\alpha > -1$ et $\beta < 0$

Orthogonalité sur $]-\infty, a[$ par rapport au poids $(a - x)^\alpha e^{\beta x}$.

• Le polynôme σ est constant

Nous supposons que $\sigma \equiv 1$ et nous écrivons τ sous la forme $\tau(x) = 2\alpha x + \beta$. Nous avons donc des famille de polynômes hypergéométriques définis par

$$\begin{cases} \sigma(x) &= 1 \\ \tau(x) &= 2\alpha x + \beta \\ \rho(x) &= e^{\alpha x^2 + \beta x} \\ \lambda_n &= -2\alpha n \end{cases} . \quad (1.25)$$

Ces polynômes sont orthogonaux relativement à ρ sur $]-\infty, \infty[$ lorsque $\alpha < 0$. Nous obtenons les **polynômes d'Hermite** H_n pour $\alpha = -1$ et $\beta = 0$ i.e. avec les éléments

$$\begin{cases} \sigma(x) &= 1 \\ \rho(x) &= e^{\alpha x^2} \\ \tau(x) &= 2\alpha x \\ \lambda_n &= 2n \end{cases}$$

et la normalisation

$$B_n = (-1)^n .$$

Remarque 4 Dans tous les cas où il y avait orthogonalité, nous avons remplacé la condition $\lambda_n \neq \lambda_m$ du théorème 1 par $n \neq m$ car dans tous ces cas on pourra vérifier que la fonction $n \mapsto \lambda_n$ est injective sur le domaine requis (cf remarque 3).

1.2.5 Relations différences-différentielles

Maintenant que nous avons mis des noms sur certains des polynômes hypergéométriques, nous allons établir les relations sus-mentionnées. Cette section est relativement calculatoire mais nécessaire. En effet, les relations telles qu'elles sont données par le théorème de Nikiforov mettent en jeu des opérateurs aux différences dont les coefficients dépendent de la variable. Or nous devons les rendre indépendants de celle-ci pour établir les opérations sur les séries. De plus, nous voulons des formules les plus explicites possibles de manière à faciliter et surtout optimiser l'implémentation. Cela implique les calculs copieux qui vont suivre.

Nous rappelons ou donnons les définitions des quantités suivantes

$$\begin{aligned}\tau_n &= \tau + n\sigma', \\ \lambda_n &= -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = -n\tau'_{\frac{n-1}{2}}\end{aligned}$$

dont nous ferons un usage intense.

Proposition 9 Récurrence à trois termes

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes hypergéométriques, solutions de l'équation (1.11), alors il existe un opérateur \mathbf{X} tel que

$$xP_n(x) = \mathbf{X}P_n(x) = \xi_1(n)P_{n+1}(x) + \xi_0(n)P_n(x) + \xi_{-1}(n)P_{n-1}(x)$$

avec

$$\begin{aligned}\xi_1(n) &= \frac{B_n}{B_{n+1}} \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_{n-1/2}\tau'_n}, \\ \xi_0(n) &= \frac{1}{\tau'_n\tau'_{n-1}} [\sigma''\tau_{n(1-n)}(0) - \tau'\tau_{2n}(0)], \\ \xi_{-1}(n) &= \frac{nB_n}{B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1/2}\tau'_{n-1}} \left[(n-1)\tau'_{\frac{n-1}{2}} (\sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0)) - (\tau')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0)}{\tau'}\right) \right].\end{aligned}$$

Démonstration :

Ce résultat est montré dans un article de Yañez, Dehesa et Nikiforov [63] par application directe du théorème de A. F. Nikiforov [47, p. 34] évoqué plus haut. Nous avons néanmoins transformé la formule donnée dans [63] pour laquelle le coefficient $\xi_{-1}(n)$ est égal à

$$\frac{nB_n}{2B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1/2}\tau'_{n-1}} I$$

avec

$$I = 2\tau'[\sigma'(0)\tau_{n-1}(0) - \sigma(0)\tau'] - \sigma''[\tau_{n-1}(0)\tau_{1-n}(0) + 4(n-1)\sigma(0)\tau'_{(n-1)/2}].$$

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

En remarquant que

$$\tau_{n-1}(0)\tau_{1-n}(0) = \tau(0)^2 - (n-1)^2(\sigma'(0))^2$$

et que

$$\sigma'(0)\tau_{n-1}(0) - \sigma(0)\tau' = \sigma'(0)\tau(0) - \sigma(0)\tau' + (n-1)\sigma'(0)^2$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} I &= 2\tau'[\sigma'(0)\tau(0) - \sigma(0)\tau'] - \sigma''\tau(0)^2 \\ &\quad + \underbrace{2(n-1)\sigma'(0)^2\tau' + (n-1)^2\sigma'(0)^2\sigma''}_{2(n-1)\sigma'(0)^2\tau'_{(n-1)/2}} - 4(n-1)\sigma(0)\sigma''\tau'_{(n-1)/2} \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2}\sigma''\tau(0)^2 + \sigma'(0)\tau'\tau(0) - \sigma(0)(\tau')^2 + (n-1)\tau'_{(n-1)/2}(\sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0)) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor du polynôme σ en 0

$$\sigma(x) = \sigma(0) + \sigma'(0)x + \frac{\sigma''}{2}x^2$$

pour évaluer σ au point $-\frac{\tau(0)}{\tau'}$ nous établissons que

$$\begin{aligned} (\tau')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0)}{\tau'}\right) &= (\tau')^2 \left(\sigma(0) - \sigma'(0)\frac{\tau(0)}{\tau'} + \frac{1}{2}\sigma''\frac{\tau(0)^2}{(\tau')^2} \right) \\ &= \sigma(0)(\tau')^2 - \sigma'(0)\tau(0)\tau' + \frac{1}{2}\sigma''\tau(0)^2. \end{aligned}$$

En effectuant la substitution correspondante dans l'expression de I nous obtenons le résultat énoncé. \square

La deuxième relation que nous présentons est une formule de dérivation dans laquelle la dérivation dépend de la famille de polynômes considérée puisqu'il s'agit de $\sigma(x)\frac{d}{dx}$. Cette relation, dite relation de structure, est donnée dans [47, p. 39, formule (7)] sous la forme

$$\sigma(x)P'_n = \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n} \left[\frac{B_n}{B_{n+1}}P_{n+1} - \tau_n(x)P_n \right]. \quad (1.26)$$

Comme nous voulons que les coefficients de la combinaison linéaire de polynômes P_n dans le membre droit ne dépendent que de n , nous utilisons la proposition 9 pour éliminer la variable x dans le terme $\tau_n(x)P_n$. Ainsi, en écrivant $\tau_n(x) = \tau_n(0) + \tau'_n x$, nous obtenons la relation suivante

$$\sigma(x)P'_n = \sigma_1(n)P_{n+1}(x) + \sigma_0(n)P_n(x) + \sigma_{-1}(n)P_{n-1}(x)$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) &= \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n} \left[\frac{B_n}{B_{n+1}} - \tau'_n \xi_1(n) \right] \\ &= \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n \tau'_{n-1/2}} \frac{B_n}{B_{n+1}} \underbrace{[\tau'_{n-1/2} - \tau'_{(n-1)/2}]}_{\frac{n}{2}\sigma''} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_0(n) &= -\frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n} [\tau_n(0) + \tau'_n \xi_0(n)] \\
 &= -\frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n} \left[\tau_n(0) + \frac{1}{\tau'_{n-1}} [\sigma'' \tau_{n(1-n)}(0) + \tau' \tau_{2n}(0)] \right] \\
 &= -\frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n \tau'_{n-1}} [\tau'_{n-1} \tau_n(0) + \sigma'' \tau_{n(1-n)}(0) + \tau' \tau_{2n}(0)] . \\
 \sigma_{-1}(n) &= -\frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n} \tau'_n \xi_{-1}(n) .
 \end{aligned}$$

Et en remplaçant les coefficients $\xi_1(n)$, $\xi_0(n)$ et $\xi_{-1}(n)$ par leurs expressions nous obtenons la

Proposition 10 Relation de structure

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes hypergéométriques, solutions de l'équation (1.11), alors il existe un opérateur $\boldsymbol{\sigma}$ tel que

$$\sigma(x)P'_n = \boldsymbol{\sigma}P_n(x) = \sigma_1(n)P_{n+1}(x) + \sigma_0(n)P_n(x) + \sigma_{-1}(n)P_{n-1}(x)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(n) &= \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n \tau'_{n-1/2}} \frac{nB_n}{2B_{n+1}} \sigma'' , \\
 \sigma_0(n) &= \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n \tau'_{n-1}} n[\sigma'(0)\tau' - \sigma''\tau(0)] , \\
 \sigma_{-1}(n) &= -\frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_{n-\frac{1}{2}} \tau'_{n-1}} \frac{nB_n}{B_{n-1}} \left[(n-1)\tau'_{\frac{n-1}{2}} (\sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0)) - (\tau')^2 \sigma \left(-\frac{\tau(0)}{\tau'} \right) \right] .
 \end{aligned}$$

Remarque 5 Les coefficients $\sigma_1(n)$, $\sigma_0(n)$ et $\sigma_{-1}(n)$ s'expriment en fonction des coefficients de la récurrence à trois termes :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1(n) &= \frac{n}{2} \sigma'' \xi_1(n) , \\
 \sigma_0(n) &= -\frac{1}{2} \tau (\xi_0(n)) , \\
 \sigma_{-1}(n) &= -\tau'_{\frac{n-1}{2}} \xi_{-1}(n) .
 \end{aligned}$$

La troisième relation que nous allons présenter lie les polynômes P_n et P'_n . Pour cette raison nous l'appelons relation de dérivation mais ce n'est pas une appellation aussi couramment employée que celles des deux premières relations. Dérivons la récurrence à 3 termes (1.10), nous obtenons

$$xP'_n + P_n = \xi_1(n)P'_{n+1}(x) + \xi_0(n)P'_n(x) + \xi_{-1}(n)P'_{n-1}(x) .$$

Nous substituons les dérivées P'_n par $\tilde{P}_{n-1} = P'_n$. La famille $\{\tilde{P}_n\}$, de polynômes hypergéométriques d'après la proposition 8, vérifie, d'après la proposition 9, une récurrence

1.2 Polynômes orthogonaux classiques

à trois termes avec des coefficients que nous noterons $\xi'_1(n)$, $\xi'_0(n)$ et $\xi'_{-1}(n)$. En utilisant cette relation pour réécrire le terme xP'_n , il vient

$$P_n = \beta_0(n)\tilde{P}_n(x) + \beta_{-1}(n)\tilde{P}_{n-1}(x) + \beta_{-2}(n)\tilde{P}_{n-2}(x)$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_0(n) &= \xi_1(n) - \xi'_1(n-1), \\ \beta_{-1}(n) &= \xi_0(n) - \xi'_0(n-1), \\ \beta_{-2}(n) &= \xi_{-1}(n) - \xi'_{-1}(n-1).\end{aligned}$$

Pour expliciter les coefficients ci-dessus il nous faut expliciter les coefficients ξ'_i . Pour cela, nous appliquons la proposition 9 au triplet $(\sigma, \tau + \sigma', -\lambda_{n+1}B_{n+1})$, ce qui se traduit par les substitutions

$$\begin{aligned}-\lambda_{n+1}B_{n+1} &\leftarrow B_n, \\ \tau_{n+1} &\leftarrow \tau_n.\end{aligned}$$

Calcul de $\beta_0(n)$

En effectuant les substitutions susmentionnées, il vient

$$\xi'_1(n-1) = \frac{\lambda_n B_n}{\lambda_{n+1} B_{n+1}} \frac{\tau'_{\frac{n}{2}}}{\tau'_{n-\frac{1}{2}} \tau'_n} = \frac{n}{n+1} \xi_1(n)$$

d'où nous tirons

$$\beta_0(n) = \frac{\xi_1(n)}{n+1}.$$

Calcul de $\beta_{-1}(n)$

De la même façon, nous calculons

$$\xi'_0(n-1) = \frac{1}{\tau'_n \tau'_{n-1}} [\sigma'' \tau_{(n-1)(2-n)+1}(0) - (\tau' + \sigma'') \tau_{2n-1}(0)]$$

et nous en tirons

$$\begin{aligned}\beta_{-1}(n) &= \frac{1}{\tau'_n \tau'_{n-1}} [\sigma'' (\tau_{(1-n)}(0) - \tau_{(n-1)(2-n)+1}(0) + \tau_{2n-1}(0)) \\ &\quad - \tau' (\tau_{2n}(0) - \tau_{2n-1}(0))] \\ &= \frac{1}{\tau'_n \tau'_{n-1}} [\sigma'' \tau(0) - \tau' \sigma'(0)].\end{aligned}$$

Il apparaît que $\beta_{-1}(n) = \sigma_0(n)/\lambda_n$ et donc, d'après la remarque 5,

$$\beta_{-1}(n) = -\frac{\tau(\xi_0(n))}{2\lambda_n}.$$

Calcul de $\beta_{-2}(n)$

Ce dernier calcul est un peu plus délicat et pour établir le lien avec la récurrence à 3 termes nous rappelons que

$$\xi_{-1}(n) = \frac{nB_n}{B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1/2} \tau'_{n-1}} \times I$$

avec

$$I = (n-1)\tau'_{\frac{n-1}{2}} (\sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0)) - (\tau')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0)}{\tau'}\right).$$

En procédant à la même substitution que dans les 2 cas précédents nous obtenons

$$\xi'_{-1}(n-1) = \frac{(n-1)\lambda_n B_n}{\lambda_{n-1} B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1} \tau'_{n-\frac{1}{2}}} \times I'$$

où

$$I' = (n-2)\tau'_{\frac{n}{2}} (\sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0)) - (\tau' + \sigma'')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0) + \sigma'(0)}{\tau' + \sigma''}\right).$$

Des expressions de $\xi_{-1}(n)$ et $\xi'_{-1}(n-1)$ nous tirons donc

$$\beta_{-2}(n) = \frac{B_n}{\lambda_{n-1} B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1/2} \tau'_{n-1}} [n\lambda_{n-1}I - (n-1)\lambda_n I']. \quad (1.27)$$

Introduisons la notation

$$\delta(\sigma) = \sigma'(0)^2 - 2\sigma''\sigma(0).$$

Avec un peu de calculs, on montre, d'une part, que

$$(\tau' + \sigma'')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0) + \sigma'(0)}{\tau' + \sigma''}\right) = (\tau')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0)}{\tau'}\right) - (\tau' + \frac{1}{2}\sigma'')\delta(\sigma)$$

et d'autre part, que

$$(n-2)\tau'_{\frac{n}{2}} + (\tau' + \frac{1}{2}\sigma'') = (n-1)\tau'_{\frac{n-1}{2}}.$$

Les deux formules précédentes nous permettent d'établir que

$$I' = 2(n-1)\tau'_{\frac{n-1}{2}}\delta(\sigma) - (\sigma'')^2\sigma\left(-\frac{\tau(0)}{\tau'}\right) = I$$

En injectant ce résultat dans l'équation 1.27 nous obtenons finalement

$$\beta_{-2}(n) = \frac{B_n}{\lambda_{n-1} B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{n-1/2} \tau'_{n-1}} \left[-n(n-1)\frac{\sigma''}{2}I \right].$$

Maintenant, si nous explicitons cette relation en utilisant les coefficients fournis par les propositions 9 et 10 nous obtenons la

Proposition 11 Relation de dérivation

1.3 Des polynômes aux séries

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes hypergéométriques, solutions de l'équation (1.11), alors il existe un opérateur \mathbf{B} tel que

$$P_n = \mathbf{B} \tilde{P}_n = \beta_0(n) \tilde{P}_n(x) + \beta_{-1}(n) \tilde{P}_{n-1}(x) + \beta_{-2}(n) \tilde{P}_{n-2}(x)$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_0(n) &= \frac{\tau'_{(n-1)/2}}{\tau'_n \tau'_{n-1/2}} \frac{B_n}{(n+1)B_{n+1}} \\ \beta_{-1}(n) &= \frac{1}{\tau'_n \tau'_{n-1}} [\sigma'' \tau(0) - \sigma'(0) \tau'] \\ \beta_{-2}(n) &= -\frac{nB_n}{B_{n-1}} \frac{1}{\tau'_{(n-2)/2} \tau'_{n-\frac{1}{2}} \tau'_{n-1}} \frac{\sigma''}{2} I\end{aligned}$$

où

$$I = 2(n-1) \tau'_{\frac{n-1}{2}} (\sigma'(0)^2 - \sigma'' \sigma(0)) - (\tau')^2 \sigma \left(-\frac{\tau(0)}{\tau'} \right).$$

Remarque 6 Les coefficients $\beta_0(n)$, $\beta_{-1}(n)$ et $\beta_{-2}(n)$ s'expriment en fonction des coefficients de la récurrence à trois termes :

$$\begin{aligned}\beta_0(n) &= \frac{\xi_1(n)}{n+1}, \\ \beta_{-1}(n) &= -\frac{\tau(\xi_0(n))}{2\lambda_n}, \\ \beta_{-2}(n) &= -\frac{\sigma''}{2\tau'_{\frac{n-2}{2}}} \xi_{-1}(n).\end{aligned}$$

Les deux premières égalités ont été montrées plus haut, la troisième se vérifie aisément.

Ainsi avons nous établi les trois relations qui vont induire les résultats sur les séries de polynômes hypergéométriques, dont la sous-classe importante des séries de polynômes orthogonaux classiques.

1.3 Des polynômes aux séries

Nous allons maintenant exploiter au niveau des séries les propriétés présentées pour les polynômes.

1.3.1 Action d'un opérateur différentiel

Les relations mises en évidence par les propositions 9, 10 et 11 pour les polynômes hypergéométriques en impliquent de similaires pour les séries de polynômes hypergéométriques par application de la proposition 2.

Proposition 12

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes de type hypergéométrique, alors il existe des opérateurs aux différences X , B et σ tels que

$$x \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} X(a_n) P_n(x), \quad (1.28)$$

$$\sigma(x) \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(a_n) P_n(x), \quad (1.29)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B(a_n) \tilde{P}_n(x). \quad (1.30)$$

Démonstration :

Cette proposition est l'application de la proposition 2 dans laquelle X , B et σ sont les opérateurs aux différences adjoints respectivement aux opérateurs \mathbf{X} de la proposition 9, \mathbf{B} de la proposition 11 et $\boldsymbol{\sigma}$ de la proposition 10. \square

La forme explicite des opérateurs X , B et σ de la proposition 2 en fonction du triplet $[\sigma, \tau, B_n]$ qui définit la famille de polynômes hypergéométriques auxquels ils s'appliquent s'obtient grâce aux propositions de la section 1.2.5 et à la notion d'opérateur adjoint. Afin de ne pas asséner à nouveau au lecteur de longues formules qu'un programme MAPLE génère fort bien, nous nous contenterons d'expliciter les opérateurs relatifs aux polynômes orthogonaux classiques. Pour cela, nous écrivons les opérateurs sus-mentionnés sous la forme

$$\begin{aligned} X &= x_{-1}(n)E^{-1} + x_0(n)I + x_1(n)E, \\ B &= b_0(n)I + b_1(n)E + b_2(n)E^2, \\ \sigma &= s_{-1}(n)E^{-1} + s_0(n)I + s_1(n)E. \end{aligned}$$

La table 1.1 donne la valeur de ces différents coefficients.

Les opérations élémentaires sur les séries données par la proposition 12 nous permettent d'appliquer formellement à une série développée suivant une famille de polynômes hypergéométriques, un opérateur différentiel appartenant à $\mathbb{C}[x, \sigma(x) \frac{d}{dx}]$. Soit L un tel opérateur

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(x) \left(\sigma(x) \frac{d}{dx} \right)^k$$

alors nous calculons facilement

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^r p_k(X) \sigma^k \right] (a_n) P_n(x). \quad (1.31)$$

Cependant un opérateur différentiel n'est en général pas élément de $\mathbb{C}[x, \sigma(x) \frac{d}{dx}]$ et bien qu'il soit toujours possible de se ramener à ce cas par multiplication par une puissance adéquate de σ , nous allons décrire un procédé qui s'applique directement et dans tous les

	Jacobi	Gegenbauer	Laguerre	Hermite
$p_n^{(0)}$	$J_n^{(\alpha, \beta)}$	$C_n^{(\lambda)}$	$L_n^{(\alpha)}$	H_n
$p_n^{(1)}$	$J_n^{(\alpha+1, \beta+1)}$	$C_n^{(\lambda+1)}$	$L_n^{(\alpha+1)}$	H_n
$d_0(n)$	$\frac{n+\alpha+\beta+2}{2}$	2λ	-1	$2(n+1)$
$x_1(n)$	$\frac{2(n+\alpha+1)(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+3)}$	$\frac{n+2\lambda}{2(n+\lambda+1)}$	$-(n+\alpha+1)$	$n+1$
$x_0(n)$	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	0	$2n+\alpha+1$	0
$x_{-1}(n)$	$\frac{n(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)}$	$\frac{n\lambda}{2(n+\lambda-1)}$	$-n$	$\frac{1}{2}$
$b_2(n)$	$-\frac{(n+\alpha+2)(n+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+4)(2n+\alpha+\beta+5)}$	$-\frac{\lambda}{n+\lambda+2}$	0	0
$b_1(n)$	$\frac{(\alpha-\beta)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+4)}$	0	-1	0
$b_0(n)$	$\frac{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{\lambda}{n+\lambda}$	1	1
$s_1(n)$	$2 \frac{(\alpha+\beta+2+n)(n+\alpha+1)(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+3)}$	$\frac{(2\lambda+n)(2\lambda+n+1)}{2(n+\lambda+1)}$	$-(n+\alpha+1)$	
$s_0(n)$	$2 \frac{(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	0	n	
$s_{-1}(n)$	$-2 \frac{n(n-1)(n+\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-1)}$	$-\frac{n(n-1)}{2(n+\lambda-1)}$	0	

TAB. 1.1 – Coefficients pour les opérations sur les polynômes orthogonaux classiques

cas pour un opérateur différentiel de $\mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}]$.

Considérons une famille $\{P_n\}$ de polynômes hypergéométriques. Nous définissons les familles de polynômes hypergéométriques $\{P_n^{(k)}\}$ comme suit

$$\begin{cases} P_n^{(0)} &= P_n \\ d_{k+1}(n)P_n^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}P_{n+1}^{(k)} \end{cases}, \quad (1.32)$$

où les d_{k+1} sont des fonctions de n qui normalisent les familles construites. Maintenant, si nous dérivons les séries en $P_n^{(k)}$ termes à termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(k)} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n d_{k+1}(n-1) P_{n-1}^{(k+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{k+1}(n) a_{n+1} P_n^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Donc, si nous définissons les opérateurs aux différences suivants

$$D_k = d_k(n)E \quad (1.33)$$

la dérivation des séries se traduit par la formule

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_k(a_n) P_n^{(k+1)}. \quad (1.34)$$

Adaptions la formule de changement de base (1.30) aux familles que nous avons introduites. Pour un k fixé, la formule (1.30) de la proposition 12 nous indique l'existence d'un opérateur B tel que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(k)} &= \sum_{n=0}^{\infty} B(a_n) \frac{d}{dx} P_{n+1}^{(k)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B(a_n) d_{k+1}(n) P_n^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Si nous introduisons l'opérateur B_k égal à $d_{k+1}(n)B$, la formule précédente devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_k(a_n) P_n^{(k+1)}. \quad (1.35)$$

Enfin, si nous notons X_k l'opérateur aux différences correspondant à la multiplication des séries en $P_n^{(k)}$ par la variable, nous pouvons appliquer un opérateur différentiel holonomie général

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \quad (1.36)$$

à une série de polynômes hypergéométriques quelconque, de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \right) &= \sum_{k=0}^r p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n^{(0)} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^r p_k(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{l=0}^{k-1} D_l \right] (a_n) P_n^{(k)} \right) \\
 &= \sum_{k=0}^r p_k(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left[\prod_{l=k}^{r-1} B_l \prod_{l=0}^{k-1} D_l \right] (a_n) P_n^{(r)} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^r p_k(X_r) \prod_{l=k}^{r-1} B_l \prod_{l=0}^{k-1} D_l \right] (a_n) P_n^{(r)}.
 \end{aligned}$$

Résumons ce résultat dans la

Proposition 13

Soit L l'opérateur différentiel (1.36). Alors l'opérateur aux différences

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(X_r) \prod_{l=k}^{r-1} B_l \prod_{l=0}^{k-1} D_l$$

est tel que

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} L(a_n) P_n^{(r)}. \quad (1.37)$$

Cette proposition valable pour toute famille de polynômes de type hypergéométrique établit un procédé d'application d'un opérateur différentiel comparable au procédé vu pour les séries de Taylor. Nous y référerons sous le nom de **schéma général** par opposition à des schémas qui utilisent une structure **particulière** de l'opérateur différentiel, comme celui que nous avons présenté pour des opérateurs de $\mathbb{C}[x, \sigma(x) \frac{d}{dx}]$. Néanmoins, si les procédés sont comparables dans le sens où nous avons associé un opérateur aux différences à un opérateur différentiel, l'association ne se fait pas (du moins de manière évidente) *via* un morphisme du fait que nous changeons de famille des polynômes à chaque dérivation. A fortiori, nous n'avons pas exhibé un isomorphisme qui nous permettrait de faire le chemin inverse d'un opérateur aux différences vers un opérateur différentiel. Nous reviendrons à ces considérations dans le cas des séries de Chebyshev pour lesquelles nous avons obtenu des résultats que nous avons bon espoir de retrouver dans le cas général.

Comme nous venons de le dire, une particularité de notre méthode est de donner comme résultat de l'application d'un opérateur différentiel une série développée suivante une famille différente de celle de la série initiale (sauf dans le cas des séries d'Hermite). Cette nécessité de changer de base provient du fait qu'il n'existe pas d'opérateur aux différences permettant d'exprimer le polynôme hypergéométrique P'_n en fonction des P_n . Bien sûr, les polynômes P'_n peuvent toujours se décomposer en termes de P_n mais suivant une relation de type triangulaire (au sens des matrices de passages associées). Si nous utilisons ces relations pour réécrire une série en P'_n en une série en P_n les coefficients de la dernière s'exprimeront au moyen d'une infinité de coefficients de la première, ce qui ne

constitue pas une opération formelle puisqu'elle implique des considérations de convergence sur les coefficients. Nous reviendrons aussi sur ce point dans le cas des séries de Chebyshev.

Revenons momentanément aux polynômes orthogonaux généraux. Nous avons vu que, en dehors du cas des polynômes orthogonaux classiques, les dérivées de polynômes orthogonaux ne sont pas des polynômes orthogonaux. Mais puisque nous considérons un ensemble beaucoup plus grand que les polynômes orthogonaux classiques, est-il possible que pour certaines familles de polynômes que la famille dérivée (non nécessairement orthogonale) s'exprime en fonction de la famille originelle *via* un opérateur aux différences ? Bonan et Nevai [5] ont montré que les seuls polynômes orthogonaux sur un intervalle infini de \mathbb{R} à vérifier une relation du type

$$P'_n = \alpha_n P_{n-k} + \beta_n P_{n-l}$$

où k et l sont deux entiers strictement positifs⁵ sont les polynômes orthogonaux pour un poids du type

$$w(x) = e^{-Ax^2 - Bx^4}.$$

Remarquons que si $B = 0$ nous retrouvons les polynômes d'Hermite (à un changement d'échelle sur la variable près). La propriété recherchée semble donc assez rare et une généralisation fort improbable.

Illustrons par un exemple l'utilisation de notre schéma général et la nécessité d'une automatisation pour son emploi.

Exemple 2 Reprenons l'opérateur différentiel de l'exemple 1

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + (3+x)\frac{d}{dx} - 7x$$

et appliquons-le, en utilisant nos formules, à une série de Laguerre

$$\begin{aligned} L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} (7na_{n-1} - (27n+21+7\alpha)a_n + (39n+57+20\alpha)a_{n+1} \\ &\quad - (25n+53+19\alpha)a_{n+2} + 6(n+3+\alpha)a_{n+3}) L_n^{(\alpha+2)} \end{aligned}$$

puis à une série d'Hermite

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{2}a_{n-1} + na_n - (n+1)a_{n+1} + 6(n+1)(n+2)a_{n+2} \right) H_n.$$

Pour les séries de Jacobi, le résultat général (c'est-à-dire pour α et β quelconques) ne tient pas sur une seule page, nous produisons donc un cas particulier ($\alpha = 1$ et $\beta = 2$) qui donnera une idée du calcul et convaincra probablement le lecteur de la nécessité d'automatiser celui-ci. Ainsi, nous avons

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n^{(1,2)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_n^{(3,4)}$$

⁵Il est d'ailleurs facile de voir que nécessairement $k = 1$.

1.3 Des polynômes aux séries

où le coefficient b_n vaut

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{7 n(n+4)(n+5)(n+7)(n+6)}{4(2 n+3)(2 n+5)(2 n+7)(n+1)(n+2)} a_{n-2} \\
&\quad + \frac{(4 n^3+24 n^2+55 n-21)(n+4)(n+5)(n+6)(n+7)}{4(2 n+3)(2 n+5)(n+2)(n+3)(2 n+9)(2 n+7)} a_{n-1} \\
&\quad + \frac{(12 n^3+149 n^2+557 n+560)(n+6)(n+7)}{4(2 n+5)(n+3)(2 n+9)(2 n+7)} a_n \\
&\quad + \frac{(16 n^5+352 n^4+3032 n^3+12752 n^2+26331 n+22050)(n+7)}{4(2 n+5)(2 n+7)(2 n+9)(2 n+11)} a_{n+1} \\
&\quad - \frac{(n+4)(12 n^3+187 n^2+889 n+1176)}{4(2 n+11)(2 n+9)(2 n+7)} a_{n+2} \\
&\quad - \frac{(n+4)(n+5)(4 n^3+72 n^2+439 n+973)}{4(2 n+13)(2 n+11)(2 n+9)(2 n+7)} a_{n+3} \\
&\quad - \frac{7 (n+6)(n+5)(n+4)}{4(2 n+9)(2 n+11)(2 n+13)} a_{n+4}
\end{aligned}$$

ce qui peut faire hésiter à prendre une feuille blanche et un crayon.

1.3.2 Application : construction de récurrences

Le schéma général d'application d'un opérateur différentiel a été obtenu pour les séries de polynômes hypergéométriques sans considérations d'orthogonalité. Nous allons présenter une application dans laquelle l'orthogonalité va jouer un rôle.

Soit $\{P_n\}$ une famille de polynômes orthogonaux sur l'intervalle $]a, b[$ pour le poids $w(x)$. Pour toute fonction f de $L_w^2(]a, b[)$, on définit les coefficients de Fourier de f par

$$a_n(f) = \frac{(f, P_n)_w}{(P_n, P_n)_w}$$

et on dit que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) P_n$$

est le développement de Fourier (relativement à la famille $\{P_n\}$) de la fonction f . Le lien entre ce développement et la fonction f dépend des propriétés de celle-ci. Là encore nous entrerons dans le détail pour les séries de Chebyshev. Néanmoins nous pouvons introduire dans le cas général, c'est-à-dire lorsque $\{P_n\}$ est une famille quelconque de polynômes orthogonaux classiques, un problème important : la construction d'une relation de récurrence vérifiée par les coefficients de Fourier de f quand f est solution d'une équation différentielle holonome $Ly = q$. Soit r l'ordre de l'équation différentielle. Si nous injectons une série à coefficients indéterminés développée suivant les P_n et si nous écrivons le polynôme q comme une série développée suivant les polynômes $P_n^{(r)}$ dont les coefficients q_n sont nuls pour $n > \deg(q)$, il vient alors en appliquant le schéma général

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}(a_n) P_n^{(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n^{(r)} .$$

En supposant que la série au centre soit uniformément convergente, l'identification terme à terme autorisée par l'orthogonalité des $P_n^{(r)}$ engendre l'équation récurrente suivante

$$\mathcal{L}(a_n) = q_n, \quad \forall n \geq 0. \quad (1.38)$$

Cette méthode de construction de récurrence sera étudiée plus précisément dans le cas des séries de Chebyshev pour lesquelles nous fournirons des résultats de convergence validant l'existence de la récurrence (1.38).

Le problème de convergence ne se pose pas lorsque que nous appliquons notre méthode à des séries finies. Cette remarque nous permet notamment d'utiliser nos résultats pour le problème de connexion entre familles de polynômes orthogonaux classiques. Donnons un exemple.

Exemple 3 Connexion entre les polynômes de Jacobi $J_n^{(a,b)}$ et $J_n^{(c,d)}$. Cette relation est établie dans un article de Godoy *et al.* [29] pour le cas monique. Nous trouvons donc ici une récurrence légèrement différente. En appliquant l'opérateur différentiel

$$L_m = (1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} + (b - a - (a + b + 2)x) \frac{d}{dx} + m(m + a + b + 1)$$

à chacun des membres de l'égalité

$$J_m^{(a,b)} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(m) J_n^{(c,d)} \quad \text{avec } C_n(m) = 0 \quad \forall n > m.$$

nous annulons le premier membre. L'action sur le second membre se traduit par l'application d'un opérateur aux différences sur les coefficients $C_n(m)$ et l'identification terme à terme nous donne une récurrence. Notons $\lambda = a + b + 1$ et $\mu = c + d + 1$, alors la récurrence générée est

$$\begin{aligned} & \frac{(n + \mu)(n + \mu - 1)(m - n + 1)(m + n + \lambda - 1)}{(2n + \mu - 2)(2n + \mu - 1)} C_{n-1}(m) \\ & + \left[\frac{(c - d)[2m(m + \lambda) + 2n(n + \mu) + (\lambda - 1)(\mu + 1)]}{2(2n + \mu - 1)(2n + \mu + 1)} + \frac{b - a}{2} \right] (n + \mu) C_n(m) \\ & + \frac{(n + c + 1)(n + d + 1)(m + n + \mu + 1)(n - m + \mu - \lambda + 1)}{(2n + \mu + 1)(2n + \mu + 2)} C_{n+1}(m) = 0. \end{aligned}$$

Remarque : pour construire cette récurrence nous n'avons pas suivi exactement le schéma général auquel cas nous eussions obtenu une récurrence d'ordre 5. Mais pour appliquer la partie $(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2}$ de l'opérateur L_m nous avons utilisé la relation de structure. Cela revient exactement à travailler dans la base \mathcal{Q}'_n au sens défini dans l'article sus-mentionné.

La même méthode peut servir au calcul de la récurrence vérifiée par les coefficients de connexion entre une famille de polynômes orthogonaux classiques et une famille de polynômes orthogonaux semi-classiques. Les polynômes orthogonaux semi-classiques - suivant la définition introduite dans [45] - sont des polynômes orthogonaux qui vérifie une relation de structure de la forme

$$R(x) P'_{n+1}(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} r_{n,\nu} P_{n+k}(x)$$

où t et s sont deux entiers positifs et $R(x)$ est un polynôme de degré t . Cette relation de structure ajoutée à la récurrence à 3 termes vérifiée par les polynômes P_n conduit, comme nous l'avons fait pour les polynômes orthogonaux classiques, à un schéma pour l'application d'un opérateur différentiel élément de $\mathbb{C}[x, R(x)\frac{d}{dx}]$ à une série formelle développée suivant les P_n . Soit $\{Q_m\}$ une famille de polynômes orthogonaux classiques. Le résultat de la multiplication à gauche par $R^2(x)$ de l'opérateur différentiel hypergéométrique qui annule Q_m s'exprime sous la forme

$$\sigma(x) \left(R(x) \frac{d}{dx} \right)^2 + (R(x)\tau(x) - R'(x)\sigma(x)) \left(R(x) \frac{d}{dx} \right) + \lambda_m R^2(x) .$$

En appliquant cet opérateur à chaque membre de l'égalité

$$Q_m(x) = \sum_{n=0}^m C_n(m) P_n(x)$$

nous annulons le membre de gauche et nous obtenons au second membre une nouvelle combinaison en P_n grâce au schéma indiqué. Nous en tirons une récurrence pour les coefficients $C_n(m)$ comme dans l'exemple 3.

Approche par produit scalaire

Nous avons utilisé les opérations sur les séries pour générer une relation de récurrence entre les coefficients de Fourier de la fonction f . Il existe une alternative qui consiste à travailler directement avec le produit scalaire pour obtenir les relations cherchées, en évitant le problème de convergence des séries. La méthode généralise à tous les polynômes orthogonaux classiques une méthode due à Paszkowski pour les coefficients de Chebyshev. On trouve une présentation de la méthode de Paszkowski dans un article de Lewanowicz [37] (le document original de Paszkowski est un livre en polonais, d'où la référence indirecte) où la méthode est étendue au cas des coefficients de Gegenbauer. Dans un article plus récent [41], Lewanowicz effectue la généralisation à toute famille de polynômes orthogonaux classiques.

Nous présentons cette méthode que nous avions nous-même établie (mais un peu tard) avec notre formalisme. Fixons une famille de polynômes orthogonaux classiques P_n pour laquelle les opérateurs \mathbf{X} et $\boldsymbol{\sigma}$ sont définis par les propositions 9 et 10. Nous introduisons l'opérateur aux différences

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\lambda_n} \boldsymbol{\sigma}. \quad (1.39)$$

Nous notons $c_n(f)$ le n -ième coefficients de Fourier de f relatif à P_n i.e.

$$c_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) P_n(x) dx .$$

Le coefficient de Fourier du produit de f par x s'exprime facilement en fonction des coefficients de Fourier de f car nous avons

$$\begin{aligned} c_n(xf) &= \int_a^b \rho(x) xf(x) P_n(x) dx \\ &= \int_a^b \rho(x) f(x) \mathbf{X} P_n(x) dx \\ &= \mathbf{X}(c_n(f)) . \end{aligned}$$

Cette formule se généralise évidemment au produit de la fonction f avec un polynôme en sa variable, par la formule

$$c_n(P(x)f) = P(\mathbf{X})(c_n(f)) . \quad (1.40)$$

L'équation de Pearson (1.12) appliquée à P_n nous montre qu'une primitive de ρP_n est $-\frac{1}{\lambda_n} \rho \sigma P'_n$, pour tout $n > 0$. Ainsi en intégrant par parties l'intégrale définissant $c_n(f)$ nous obtenons

$$c_n(f) = \left[f(x) \frac{-1}{\lambda_n} \rho(x) \sigma(x) P'_n(x) \right]_a^b + \int_a^b f'(x) \frac{1}{\lambda_n} \rho(x) \sigma(x) P'_n(x) dx .$$

Du fait de l'annulation de $\rho \sigma$ aux extrémités de l'intervalle d'intégration, le crochet peut être supprimé et nous avons finalement

$$c_n(f) = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b f'(x) \sigma P_n(x) dx = \mathbf{S} c_n(f') \quad \forall n > 0 . \quad (1.41)$$

Nous allons maintenant pouvoir construire une équation récurrente grâce aux formules (1.40) et (1.41). Mais pour cela nous devons mettre l'opérateur différentiel L sous une forme particulière décrite dans le

Lemme 1

$$\left\| \begin{array}{l} \text{L'opérateur différentiel holonome } L \text{ défini par (1.36) se réécrit} \\ \\ Ly = (\bar{p}_r y)^{(r)} + (\bar{p}_{r-1} y)^{(r-1)} + \cdots + \bar{p}_0 y \\ \\ \text{où} \\ \bar{p}_i = \sum_{k=i}^r (-1)^{k-i} C_k^i p_k^{(k-i)} . \end{array} \right. \quad (1.42) \quad (1.43)$$

Démonstration :

Nous allons d'abord exprimer les p_k en fonction des \bar{p}_i puis inverser la relation. Pour cela, nous développons chaque terme $(\bar{p}_i y)^{(i)}$ dans l'égalité (1.42) en utilisant la formule de Leibniz.

$$\begin{aligned} Ly &= \sum_{i=0}^r \left(\sum_{k=0}^i C_i^k \bar{p}_i^{(i-k)} y^{(k)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^r \left(\sum_{i=k}^r C_i^k \bar{p}_i^{(i-k)} \right) y^{(k)} \end{aligned}$$

On en déduit les relations

$$p_k = \sum_{i=k}^r C_i^k \bar{p}_i^{(i-k)} \quad k = 0 \cdots r$$

Ecrivons ces relations sous forme matricielle

$$\vec{P} = A \vec{R} \quad (1.44)$$

où

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \vdots \\ p_k \\ \vdots \\ p_r \end{pmatrix}, \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} \bar{p}_0 \\ \vdots \\ \bar{p}_k \\ \vdots \\ \bar{p}_r \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

et où la matrice A est définie par

$$A_{i,j} = \begin{cases} C_j^i \partial_x^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}. \quad (1.46)$$

Nous allons inverser la relation (1.44) en interprétant la matrice A comme la matrice d'un endomorphisme d'espace vectoriel (ou plus exactement de module) convenablement choisi. Considérons l'ensemble M des opérateurs aux dérivées partielles par rapport à 2 variables x et y , linéaires et à coefficients constants, et degré r pour la dérivation par rapport à y . On peut considérer M comme un $\mathbb{C}[\partial_x]$ -module de dimension r dont une base serait $1, \partial_y, \dots, \partial_y^r$. Tout élément de M peut en effet être mis sous la forme

$$\sum_{k=0}^r p_k(\partial_x) \partial_y^k, \quad p_k \in \mathbb{C}[X].$$

Considérons maintenant l'endomorphisme u qui a un opérateur de M associe l'opérateur obtenu par la substitution $\partial_y \mapsto \partial_y + \partial_x$. Puisque

$$(\partial_y + \partial_x)^j = \sum_{i=0}^j C_j^i \partial_y^i \partial_x^{j-i}$$

on voit que la matrice associée à l'endomorphisme u (relativement à la base $1, \partial_y, \dots, \partial_y^r$) est la matrice A . L'endomorphisme u^{-1} inverse de u est celui qui effectue la substitution $\partial_y \mapsto \partial_y - \partial_x$. En appliquant comme ci-dessus la formule du binôme, on trouve facilement la matrice inverse de A définie par

$$(A^{-1})_{i,j} = \begin{cases} C_j^i (-1)^{j-i} \partial_x^{j-i} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}. \quad (1.47)$$

Pour conclure on écrit composante par composante le produit $\vec{R} = A^{-1} \vec{P}$ et on trouve les relation (1.43) de l'énoncé. \square

Soit f une fonction r fois dérivable et pour laquelle nous supposons l'existence des coefficients $c_n(f^{(k)})$ pour $k = 0, \dots, r$ et de $c_n(Lf)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^r c_n(Lf) &= \sum_{k=0}^r \mathbf{S}^{r-k} \mathbf{S}^k c_n((\bar{p}_k(x)f)^{(k)}) \\ &= \sum_{k=0}^r \mathbf{S}^{r-k} c_n(\bar{p}_k(x)f) \\ &= \sum_{k=0}^r \mathbf{S}^{r-k} \bar{p}_k(\mathbf{X}) c_n(f). \end{aligned}$$

Si f est solution de l'équation différentielle $Ly = q$, alors ces coefficients de Fourier vérifient l'équation récurrente

$$\sum_{k=0}^r \mathbf{S}^{r-k} \bar{p}_k(\mathbf{X}) c_n(f) = \mathbf{S}^r c_n(q) \quad (1.48)$$

Du fait que la formule (1.41) qui établit l'usage de l'opérateur \mathbf{S} , est valide pour $n > 0$, la récurrence (1.48) est vérifiée pour $n \geq r$. Le lien entre les équations récurrentes (1.38) et (1.48) sera montré plus loin dans le cas des coefficients de Chebyshev.

1.4 Conclusion

Nous venons d'établir des résultats qui seront le point de départ de l'étude plus spécifique des séries de Chebyshev dans la seconde partie de ce mémoire. Avant de re-center sur ces séries, notons que le travail réalisé sur les séries orthogonales constitue une base importante pour la mise en oeuvre efficace et automatique des méthodes spectrales qui trouvent un élan nouveau grâce au calcul formel (*cf* les remarques de J.P. Boyd à ce sujet [8]). C'est pourquoi, le chapitre suivant est consacré à l'usage du calcul formel pour la manipulation des séries orthogonales.

Chapitre 2

Outils informatiques pour les séries orthogonales

Dans ce chapitre, nous présentons la réalisation informatique qui met en oeuvre les résultats théoriques vus dans le chapitre précédent, notamment les opérations élémentaires sur les séries orthogonales et bien sûr le schéma général d'application d'un opérateur différentiel sur une série orthogonale. Originellement conçu pour les séries de Chebyshev puis étendu aux séries de polynômes orthogonaux classiques, notre programme écrit en MAPLE a été nommé *orthoseries* pour ces raisons "historiques". Or les méthodes pour effectuer des opérations sur les séries orthogonales s'étendent aux opérations sur des séries développées suivant de familles de fonctions pour lesquelles ces opérations s'expriment par l'application d'opérateurs aux différences (citons les séries trigonométriques, les séries de Neumann - développées suivant des fonctions de Bessel -, les séries de Laurent etc...). Aussi cette extension dans la théorie est-elle structurellement prévue dans notre programme comme nous tâcherons de le montrer. Enfin, nous voulons éviter de faire de ce chapitre un manuel de l'utilisateur tout en présentant les diverses procédures auxquelles nous ferons référence dans les chapitres suivants.

2.1 Représentation des séries orthogonales

Avant toute idée de réalisation informatique, il convient de bien identifier les objets mathématiques que nous voulons manipuler pour définir les structures informatiques correspondantes. Il va sans dire que l'objet primordial à représenter est la série orthogonale telle que nous l'avons introduite et manipulée dans le chapitre précédent. Cependant, dans les applications numériques il est pratique voire nécessaire d'utiliser des séries partielles que nous devons considérer comme un type d'objet à part entière.

2.1.1 Séries : la structure OS

Soit une série orthogonale écrite en toute généralité

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) .$$

Les éléments constitutifs significatifs de cette série sont les suivants :

1. La famille suivant laquelle la série est développée, ici P_n . Nous parlerons du genre de la série. Ce genre est déterminant pour savoir comment agir sur la série. La représentation du genre d'une série se fait à l'aide d'une liste (type list de MAPLE) comprenant le nom de la famille complété par un certain de nombre de paramètres. Ex : les polynômes de Laguerre L_n^α sont représentés par la liste $[L, \alpha]$. Une famille de polynômes hypergéométriques en toute généralité est représentée par la liste $[HYP, \sigma, \tau, n \mapsto B_n]$ où les 3 paramètres sont de type function en MAPLE.
2. La variable sur laquelle s'appliquent les polynômes de la série, ici x . Cette information est fondamentale pour diverses opérations et en premier lieu pour la dérivation.
3. La suite des coefficients, ici a_n , de la série. Nous parlerons du terme, sous-entendu général, de la série. C'est sur ce terme que s'appliqueront les opérateurs aux différences associés aux opérations sur les séries. Remarque : en MAPLE les termes a_n d'une suite seront représentés par l'expression de type fonction $a(n)$.
4. La variable d'indexation, ici n , du terme que nous nommerons l'indice. Il est nécessaire à l'application des opérateurs aux différences.

Les différentes informations que nous venons de décrire sont assemblées sous forme d'un tableau de type `array` en MAPLE, pour former un objet que nous dirons de type OS. La structure du tableau devant rester souple, notamment pour l'adjonction d'informations supplémentaires, l'utilisateur crée un objet de type OS en utilisant une procédure, `creer-OS`, qui se charge de construire un tableau au format voulu. Ainsi la série de Laguerre

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} L_n^{(\alpha)}(y)$$

sera créée par la commande

$$\text{creer-OS}(2^{-n}, n, [L, \alpha], y) .$$

Pour la même raison de souplesse, l'utilisateur ou le programmeur extrait les informations relatives à un objet de type OS à l'aide des procédures d'extraction suivantes dont les noms indiquent de manière évidente la fonction : OS-terme, OS-variable, OS-genre et OS-indice. En procédant ainsi, nous assurons que les procédures informatiques de manipulations des séries restent "insensibles" à un changement de représentations des séries.

2.1.2 Séries partielles : la structure OSP

Considérons la série partielle

$$\sum_{n=0}^m a_n P_n(x) . \tag{2.1}$$

Nous pouvons envisager cet objet de deux façons différentes : d'une part, comme une série dont les coefficients sont nuls à partir d'un certain rang ; d'autre part comme une réelle combinaison finie. Dans le premier cas la somme (2.1) peut être représentée dans une structure OS avec pour terme général $I_m(n)a(n)$ où I_m vaut 1 sur $\{0, \dots, m\}$ et 0 ailleurs. Dans le second cas, nous introduisons une nouvelle structure : OSP, dans laquelle la notion de terme général est remplacée par une liste de coefficients a_0, a_1, \dots, a_m . Dans cette structure la notion d'indice devient inutile. Comme dans le cas de la structure OS, un objet de type OSP est représenté par un tableau MAPLE que l'on peut créer grâce à la procédure `creer-OSP`. Par exemple, l'appel

2.1 Représentation des séries orthogonales

creer-OSP([1, -7, π , $\frac{3}{2}$],[C , λ], x).

crée une série de Gegenbauer partielle. Là encore les informations sont extraites par des procédures adéquates : OSP-liste, OSP-variable, OSP-genre. Pour atteindre un coefficient particulier, nous avons la procédure OSP-coeff pour les entrées (n, S) qui renvoie le n -ième coefficient de l'objet S de type OSP.

Il est souvent utile de créer une série partielle identiquement égale à 1. La liste de coefficients associée est alors composée d'une seule valeur : $\frac{1}{P_0}$. L'objet de type OSP correspondant est créé par la procédure unite-OSP. Nous verrons plus loin une application de cette procédure.

Evaluation des séries partielles : le schéma de Horner généralisé

Une spécificité des séries partielles, qui les distingue des séries infinies, est que l'on peut toujours les évaluer. Cette évaluation doit se faire de façon efficace tant au niveau de la rapidité que de la précision du résultat. Il est bien connu que pour évaluer le polynôme

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \quad (2.2)$$

la méthode qui consiste à calculer indépendamment chaque puissance x^k puis à effectuer la combinaison linéaire, est à prohiber absolument. Le nombre de multiplication est alors de l'ordre de $p^2/2$ et réalisé en flottants le résultat du calcul peut être déplorable. L'évaluation efficace du polynôme (2.2) se fait avec l'algorithme d'Horner. Cet algorithme est le suivant : si nous définissons la suite u_n comme suit

$$\begin{cases} u_{p+1} = 0 \\ u_n = x u_{n+1} + a_n, \quad n = 0 \cdots p \end{cases}$$

alors nous avons

$$u_0 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p.$$

L'algorithme de Horner requiert seulement p multiplications. Pour les mêmes raisons, il est exclu d'évaluer la série partielle

$$\sum_{n=0}^p a_n P_n(x) \quad (2.3)$$

en calculant chaque polynôme P_n et en effectuant la combinaison linéaire. Un procédé pour évaluer les séries de Chebyshev partielles a été donné par Clenshaw [11] et étendu par Luke [43] pour toute séries finies de fonctions vérifiant une récurrence à trois termes. Nous allons présenter une extension de ces méthodes pour l'évaluation de séries finies de fonctions vérifiant une récurrence d'ordre quelconque. Le procédé possédant l'algorithme de Horner comme cas particulier nous l'avons nommé schéma de Horner généralisé.

Proposition 14 Schéma de Horner généralisé

Soit la suite $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par la récurrence

$$b_n = R(b_n) = \sum_{k=1}^e r_k(n) b_{n-k} \quad \forall n \geq e, \quad (2.4)$$

b_0, \dots, b_{e-1} étant des complexes fixés, et $b_n = 0$ pour $n < 0$. Soit $\{a_n\}_{n=0, \dots, p}$ une suite donnée de $p+1$ complexes, alors

$$\sum_{n=0}^p a_n b_n = \sum_{n=0}^{e-1} B_n [I - R](b_n)$$

où les B_n sont définis par

$$\begin{cases} B_{p+1} = B_{p+2} = \dots = B_{p+e} = 0 \\ B_n = R^*(B_n) + a_n \quad n = 0, 1, \dots, p \end{cases} \quad (2.5)$$

R^* étant l'opérateur aux différences adjoint de R .

Démonstration :

Nous complétons les suites $\{a_n\}$ et $\{B_n\}$ en convenant que

$$\begin{aligned} a_n &= 0 && \text{pour } n < 0 \text{ et } n > p, \\ B_n &= 0 && \text{pour } n > p+e. \end{aligned}$$

Moyennant cette convention, nous avons

$$\sum_{n=0}^p a_n b_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_n. \quad (2.6)$$

De plus, nous tirons des relations (2.4) et (2.5) les égalités suivantes

$$\begin{aligned} [I - R](b_n) &= 0 && \text{pour } n \geq e \text{ et } n < 0, \\ [I - R]^*(B_n) &= a_n && \text{pour } n \geq 0. \end{aligned}$$

En utilisant ces relations, nous transformons de second membre de (2.6)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p a_n b_n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I - R]^*(B_n) b_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n [I - R](b_n) \\ &= \sum_{n=0}^{e-1} B_n [I - R](b_n). \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième série est une application de la proposition 2. \square

Le schéma de Horner généralisé permet d'évaluer une somme du type $\sum a_n b_n$ sans calculer explicitement chaque b_n apparaissant dans la somme. L'algorithme s'applique bien sûr, et c'est son utilisation première, lorsque la suite b_n est une suite de fonctions. En particulier, pour évaluer des séries orthogonales partielles nous avons le

2.2 Opérations sur les séries

Corollaire 2 Evaluation des séries orthogonales

Soit P_n une famille de polynômes orthogonaux non nécessairement classiques ou de polynômes hypergéométriques non nécessairement orthogonaux. Cette famille vérifient donc une relation à trois termes du type

$$P_{n+1}(x) = (\alpha_n + \beta_n x)P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) .$$

Construisons la suite u_n

$$\begin{cases} u_{m+1} = u_{m+2} = 0 \\ u_n = (\alpha_n + \beta_n x)u_{n+1} + \gamma_{n+1}u_{n+2} + a_n, \quad n = 0 \dots m \end{cases} .$$

Alors, l'évaluation des séries partielles en P_n se fait comme suit

$$\sum_{n=0}^m a_n P_n(x) = u_0 P_0(x) + u_1 [P_1(x) + \alpha_0 P_0(x)] .$$

Le schéma de Horner généralisé dans le cas particulier du corollaire précédent dans notre est implémenté dans notre programme sous le nom eval-OSP.

2.2 Opérations sur les séries

2.2.1 Opérations élémentaires sur les séries

Un certain nombre de d'opérations se font indépendamment de la nature des séries. Ce sont en particulier les opérations suivantes, pour lesquelles nous donnons nos procédures MAPLE correspondantes

- Multiplication par un scalaire : Scal-OS(a, S) multiplie la série S , c'est-à-dire son terme général, par a .
- Addition : Add-OS($S1, S2$) additionne les séries $S1$ et $S2$.
- Combinaison linéaire : CombLin-OS($a, S1, b, S2$) réalise la combinaison linéaire $a S1 + b S2$.

Néanmoins, pour les deux dernières opérations exigent des conditions de compatibilité, puisque les séries $S1$ et $S2$ ne pourront s'additionner ou se combiner que si elles ont le même genre et la même variable auquel cas on pourra effectuer l'opération adéquate sur les termes généraux pour obtenir le terme général du résultat. Dans leurs versions de base les procédures d'addition et de combinaison renvoi un message d'erreur en cas de non compatibilité.

Maintenant, considérons les opérations dont le résultat dépend de la nature de la série donc du genre de l'objet de type OS correspondant. D'après les résultats vus au chapitre précédent, toute une classe d'opérations agissent sur les séries orthogonales par application d'un opérateur aux différences sur le terme général pour donner le terme de la série résultante qui est éventuellement développée suivant une autre famille de polynômes.

- X-OS(S) : multiplie la série S par sa variable. Stable pour le genre.
- Poly-OS(p, S) : multiplie la série S par le polynôme p exprimé dans la base canonique par itération de la procédure précédent suivant le schéma de Horner. Stable pour le genre.
- Diff_OS(S, x) : dérive la série S par rapport à x .

- `SigmaDiff-OS(S,x)` : dérive S suivant la relation de structure. Stable pour le genre.
- `RelDiff-OS(S)` : réécrit S dans la base des dérivées (à une normalisation près) en utilisant la relation de dérivation.

Pour effectuer les opérations énumérées notre programme doit “prendre connaissance” des opérateurs aux différences et des genres résultants associés à chaque couple opération-genre de la série initiale. La “prise de connaissance”¹ s’effectue *via* une base de données qui est simplement une procédure MAPLE qui effectue l’association

$$(\text{genre, opération}) \quad \longmapsto \quad (\text{genre du résultat, opérateur aux différences}) .$$

La figure 2.1 illustre l’interrogation de la base de données. De cette manière, les opérations ($X\text{-OS}$, Poly-OS , etc...) sont écrites une seule fois (c’est-à-dire pour tout genre de la série en entrée) et procèdent, de façon interne et transparente pour l’utilisateur, à l’interrogation de la base pour effectuer les bons calculs sur le terme et renvoyer un résultat du genre adéquat. Cette approche a en outre l’avantage de permettre l’ajout ultérieur de nouveaux types de séries sans autre modification qu’un renseignement de la base de données.

Pour l’heure, notre base contient les données nécessaires au travail avec les séries de Jacobi, Gegenbauer (donc Legendre), Chebyshev, Laguerre et Hermite. Nous pourrions condenser tous ces cas particuliers en un seul type hypergéométrique mais le coût de calcul est moindre en utilisant cette particularisation.

2.2.2 Opérations élémentaires sur les séries partielles

Toutes les opérations applicables aux séries le sont a fortiori aux séries partielles. En termes de programmation, toutes les procédures présentées dans la section précédente ont leurs pendants pour les objets de type OSP. Ces procédures portent le même nom mais avec le suffixe `-OSP`. Toutefois, il faut souligner deux points qui distinguent les opérations sur les séries partielles. D’une part, les problèmes de compatibilités évoqués pour les séries disparaissent car le changement de base est toujours possible, en théorie, entre familles de polynômes (ce qui ne serait pas le cas avec des séries partielles de Neumann, par exemple) et en pratique avec les outils que nous présenterons plus bas. D’autre part, avec les objets de type OSP les opérateurs aux différences associés aux opérations n’agissent plus sur une valeur symbolique (le terme) mais sur une liste de coefficients.

2.2.3 Autres opérations

Nous avons présenté l’implémentation des opérations élémentaires relatives aux séries et aux séries partielles. A l’aide des procédures correspondantes, nous pouvons construire des procédures plus élaborées. Notamment, nous avons implémenté le schéma général d’application d’un opérateur différentiel sur une série orthogonale dans les procédures `OpDiff-OS` et `OpDiff-OSP`. Mais voyons d’autres constructions.

Multiplication d’une série par une série partielle

Nous disposons jusqu’ici d’une procédure (`Poly-OS`) pour multiplier une série orthogonale par polynôme écrit dans la base canonique. Il serait évidemment pratique et conforme à la philosophie de notre programme de pouvoir effectuer le produit d’une série

¹On nous pardonnera l’anthropomorphisme de l’expression.

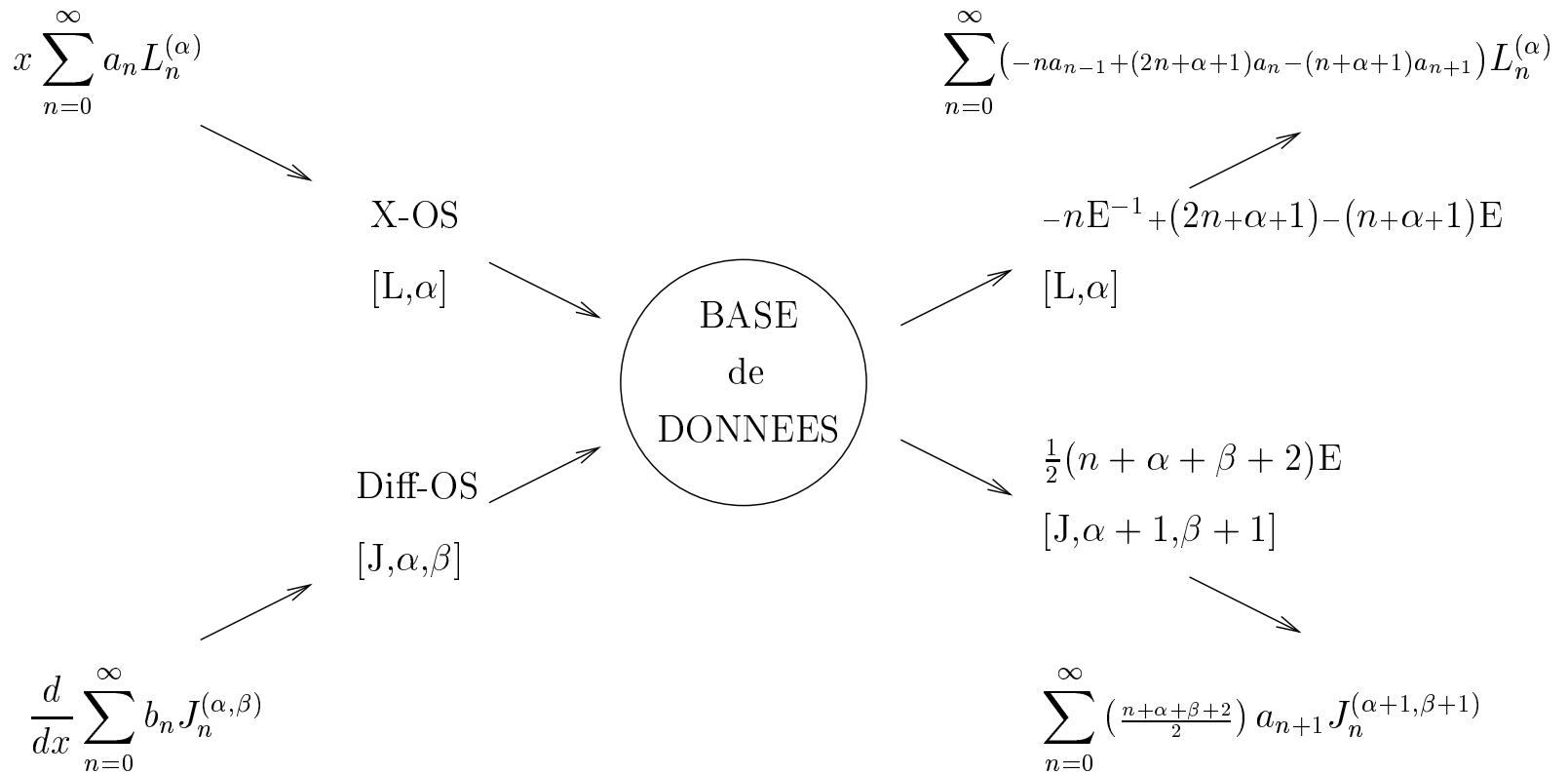


FIG. 2.1 – Interrogation de la base de donnée pour la multiplication par x d'une série de Laguerre et la dérivation d'une série de Jacobi

orthogonale avec une série partielle écrite dans une base quelconque de polynômes hypergéométriques. Cette opération est réalisable grâce à une adaptation simple du schéma de Horner généralisé. Pour cela nous écrivons une égalité en forme de lapalissade

$$\sum_{n=0}^p a_n P_n(x) \sum_{m=0}^{\infty} b_m Q_m(x) = \sum_{n=0}^p (a_n S) P_n(x) \quad (2.7)$$

dans laquelle P_n et Q_n sont des polynômes hypergéométriques et où

$$S = \sum_{m=0}^{\infty} b_m Q_m(x) .$$

Calculer le produit au membre gauche de (2.7) revient à évaluer le membre de droite. Pour effectuer cette évaluation, nous appliquons l'algorithme de Horner généralisé avec un petit aménagement : chaque opération effectuée sur les coefficients A_n est une opération de type -OS.

$$\begin{cases} U_{m+1} = U_{m+2} = 0 \\ U_n = (\alpha_n + \beta_n x) U_{n+1} + \gamma_{n+1} U_{n+2} + a_n S, \quad n = 0 \cdots m \end{cases} .$$

Dans la transcription informatique de cette itération les U_k et S sont des objets du type OS, le produit xU_{n+1} est effectué par X-OS, la multiplication par les scalaires grâce à Scal-OS et les additions se font par Add-OS. Evidemment, la même approche s'applique pour multiplier deux objet de type OSP. Nous définissons ainsi les procédures

- mult-OSP-OS(P,S) : effectue le produit de la série partielle P par la série S suivant le procédé décrit plus haut. Le genre du résultat est celui de la série.
- mult-OSP-OSP(P1,P2) : effectue le produit de la série partielle P1 par la série partielle P2. Le genre du résultat est celui de P2.

Changement de bases

Une application du produit des séries partielles tel que nous l'avons défini est le changement de base. En effet, soit P une série partielle de genre g_1 et soit U la série partielle de genre g_2 identiquement égale à 1. Par construction de la procédure, le résultat de l'appel

$$\text{mult-OSP-OSP}(P,U)$$

est la série partielle de genre g_2 égale à P. Nous avons ainsi effectué un changement de base qui est réalisé dans notre programme par la procédure Conversion-OSP.

2.3 Séries de plusieurs variables

Nous avons concentré notre travail sur les équations différentielles ordinaires et conséquemment sur les séries dépendant d'une seule variable. Pourtant nous pouvons étendre assez aisément nos résultats à des séries en plusieurs variables du type produit tensoriel

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} P_n(x) Q_m(y) \quad (2.8)$$

2.3 Séries de plusieurs variables

auxquelles nous pouvons appliquer des opérateurs aux dérivées partielles holonomes. Le résultat d'une opération élémentaire (multiplication par l'une des variables, dérivation par rapport à celle-ci) s'obtient par application d'un opérateur aux différences sur le terme général de la série. La seule différence est qu'il faut faire agir cet opérateur sur l'indice correspondant à la variable. Dans le cas de la série (2.8) par exemple aux opérations relative à la variable x (resp. y) correspondront des opérateurs aux différences agissant sur la l'indice n (resp. m) du terme général. Prenons un exemple : la multiplication par l'une des variables. Supposons que Q_m soit le polynôme de Gegenbauer $C_m^{(\alpha)}$, alors

$$y \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} P_n(x) Q_m(y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \left(\frac{m a_{n,m-1} + (m+2\alpha) a_{n,m+1}}{2(m+1-\alpha)} \right) P_n(x) Q_m(y)$$

On itère facilement cette opération élémentaire afin de multiplier la série (2.8) par un polynôme en x et y .

L'application d'opérateur aux dérivées partielles n'est guère plus compliquée que le cas à une variable mais nécessite d'être bien conduite si l'on veut obtenir un résultat sous forme d'une unique série. Par exemple nous voulons appliquer l'opérateur $\frac{d}{dx} + \frac{d}{dy}$ sur la série (2.8). Supposons que P_n se dérive dans la base $P_n^{(1)}$ par application de l'opérateur $D_1 = d_1(n)E$ et que Q_m se dérive dans la base $Q_m^{(1)}$ par application de l'opérateur $D_2 = d_2(m)E$. Nous obtenons alors dans un premier temps

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} d_1(n) a_{n+1,m} P_n^{(1)}(x) Q_m(y) + \sum_{n,m=0}^{\infty} d_2(m) a_{n,m+1} P_n(x) Q_m^{(1)}(y).$$

En utilisant les opérateur de changement de base : **B₁** pour aller de P_n vers $P_n^{(1)}$ et **B₂** pour aller de Q_m vers $Q_m^{(1)}$, **B₁** agissant sur la variable n et **B₂** sur la variable m , il vient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} [\mathbf{B}_2(d_1(n)a_{n+1,m}) + \mathbf{B}_1(d_2(m)a_{n,m+1})] P_n^{(1)}(x) Q_m^{(1)}(y).$$

Pour l'application des opérateurs plus substantiels la complexité du résultat s'accroît rapidement sans difficulté théorique mais avec un besoin impérieux d'automatisation.

La représentation des séries en plusieurs variables est une extension de celle des séries en une variable. Un tableau contient le terme général multi-indicé et une liste de triplets variable-indice-genre comme le montre l'exemple suivant aussi général que possible

$$\left[\begin{array}{c} [n_1, x_1, \text{genre}_1] \\ a(n_1, \dots, n_p), \dots \\ [n_p, x_p, \text{genre}_p] \end{array} \right] .$$

Une opération appliquée sur cette structure suit le déroulement suivant : on recherche dans la liste des triplets la variable concernée par l'opération, on soumet l'opération et le genre du triplet sélectionné à la base de données, on récupère un opérateur aux différences que l'on fait agir sur le terme avec l'indice adéquat et un genre du résultat qu'on substitue dans le triplet.

Néanmoins si la démarche algorithmique reste très similaire au cas à une variable, la programmation du cas à plusieurs variables est un peu plus délicate et reste à développer plus complètement. Ce développement est d'autant plus souhaitable qu'il permettra la mise en oeuvre de méthodes spectrales pour les équations aux dérivées partielles.

2.4 Conclusion

Ce chapitre est relativement succinct du fait que le passage de la théorie sur les séries de polynômes hypergéométriques à la programmation se fait de manière très directe. Néanmoins nous avons profité du contexte de ce chapitre pour introduire quelques applications (changement de base) et extensions (cas à plusieurs variables) de la théorie. Enfin, il nous fallait nommer les diverses procédures dont nous aurons l'usage dans le dernier chapitre consacré à la résolution numérique d'équations différentielles.

Deuxième partie

Etude théorique et pratique des séries de Chebyshev

Chapitre 3

Séries de Chebyshev et équations différentielles

Dans ce chapitre nous introduisons les propriétés nécessaires aux différentes études que nous mènerons sur les séries de Chebyshev dans les chapitres suivants. Nous voulons en particulier mettre en exergue la double nature des polynômes de Chebyshev : une nature hypergéométrique qui leur fait hériter des propriétés discutées au chapitre 1 et une nature trigonométrique que nous allons voir maintenant et qui entraîne de nouvelles propriétés.

3.1 Introduction : rappels

3.1.1 Equations différentielles holonomes

Nous rappelons que nous nommons équation différentielle holonome une équation différentielle linéaire à coefficients polynomiaux. L'opérateur L désigne génériquement l'opérateur holonome

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(x) \frac{d^k}{dx^k}. \quad (3.1)$$

En ajoutant un second membre polynominal q quelconque, nous obtenons une équation différentielle holonome

$$Ly = q \quad (3.2)$$

à laquelle nous ferons référence dans tout ce chapitre. La théorie des équations différentielles linéaires à coefficients analytiques (voir par exemple Ince [32]) adaptée au cas holonome nous livre le théorème fondamental suivant

Théorème 2

|| *Une solution de l'équation (3.2) est analytique en tout point du plan complexe qui n'est pas racine du polynôme p_r .*

Ce théorème nous amène à définir une classe particulière de fonctions.

Définition 6

|| *Notons \mathbb{M} l'ensemble des fonctions qui sont analytiques sur \mathbb{C} sauf en un nombre fini de points du plan complexe, que nous appellerons singularités. Pour une fonction f de \mathbb{M} , $\text{Sg}(f)$ désigne l'ensemble des singularités de f .*

Telle nous l'avons définie - et ce n'est pas une définition classique - la notion de singularité désigne une valeur de \mathbb{C} et ne s'applique donc pas au point à l'infini qui peut néanmoins être singulier au sens classique. Cette définition restreinte nous évitera d'avoir à distinguer entre singularités à l'infini et singularités à distance finie dans des applications où seules ces dernières seront considérées. La définition 6 nous permet de reformuler le théorème 2 ainsi : toute solution f de l'équation (3.1) est élément de \mathbb{M} avec $\text{Sg}(f) \subset \text{rac}(p_r)$.

3.1.2 Séries de Chebyshev

La richesse de propriétés des polynômes de Chebyshev permet une multitude de définitions équivalentes de ces polynômes. Dans la logique de ce mémoire nous donnerons la définition suivante

Définition 7

Les polynômes de Chebyshev, notés T_n , sont les polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$ relativement au produit scalaire défini par

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (3.3)$$

et normalisés en imposant $T_n(1) = 1$.

Sauf indication contraire, la notation (f, g) désignera désormais par défaut le produit scalaire (3.3). L'unicité, à un facteur de normalisation près, des polynômes relatifs à un intervalle et un poids donnés impliquent que les polynômes de Chebyshev sont proportionnels aux polynômes de Jacobi pour les paramètres $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. Le facteur de normalisation est précisé par l'égalité [1, 22.5.28]

$$T_n = \frac{n!}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\pi} J_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}. \quad (3.4)$$

Introduisons la famille de fonctions t_n définies sur $[-1, 1]$ par $t_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. En utilisant le changement de variable, $x = \cos \theta$, nous établissons que

$$(t_n, t_m) = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$$

qui est nul pour $n \neq m$. Ainsi les fonctions t_n sont orthogonales pour le produit scalaire de Chebyshev. Mais par ailleurs, la relation trigonométrique

$$2 \cos \theta \cos n\theta = \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta$$

se traduit pour les t_n par la relation

$$t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x).$$

Puisque $t_0(x) = 1$ et $t_1(x) = x$, cette relation prouve que les t_n sont des polynômes et comme de façon évidente $t_n(1) = 1$, la propriété d'unicité implique que $t_n = T_n$. Nous avons ainsi établi deux propriétés bien connues : la nature trigonométrique des polynômes de Chebyshev rappelée dans la formule

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) = \cos(n\theta) \quad x \in [-1, 1], \quad x = \cos \theta \quad (3.5)$$

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

et la récurrence à trois termes caractéristique des polynômes orthogonaux

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) . \quad (3.6)$$

En notant $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ le poids de Chebyshev, nous introduisons la notation $L_w^2([-1, 1])$ pour désigner l'ensemble de fonctions f de carré intégrable pour la mesure $w(x)dx$. Nous avons alors la

Définition 8

La série de Chebyshev d'une fonction f appartenant à $L_w^2([-1, 1])$ est la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n(f)T_n(x) \quad (3.7)$$

où les coefficients de Chebyshev $c_n(f)$ sont définis par

$$c_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) \frac{T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx . \quad (3.8)$$

La notation \sum' signifie que le coefficient d'indice 0 est divisé par 2. Cette notation n'est pas une coquetterie mais une convention qui, nous le verrons, simplifie les formules. Elle est, de plus, l'indice du lien fort qui lie polynômes de Chebyshev et polynômes trigonométriques, et, subséquemment, séries de Chebyshev et séries de Fourier. En effectuant le changement de variable $x = \cos \theta$ dans l'intégrale (3.8) nous obtenons

$$c_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos \theta) \cos(n\theta) d\theta , \quad (3.9)$$

de sorte que les coefficients de Chebyshev de la fonction f sont les coefficients de Fourier de la fonction $f \circ \cos$. La série de Fourier de $f \circ \cos$ (qui est une série en cosinus du fait de la parité de la fonction) est la série

$$\frac{1}{2}c_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) \cos(n\theta) \quad (3.10)$$

dans laquelle nous reconnaissions la série (3.7) après changement de variable et où nous retrouvons le coefficient $\frac{1}{2}$. Le lien que nous venons de mettre en évidence entre séries de Fourier et séries de Chebyshev, a fait dire à certains auteurs que les séries de Chebyshev ne sont que des séries de Fourier déguisées. Nous espérons que le présent mémoire éloignera du lecteur une pareille pensée.

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

Comme toute base orthonormée Hilbertienne (et en particulier comme toute famille complète de polynômes orthogonaux) la famille $\{T_n\}$ est adaptée à l'approximation des fonctions de $L^2([-1, 1])$ en moyenne quadratique relative au produit scalaire qui engendre la base (voir par exemple Davis [18]). Les polynômes de Chebyshev présentent des propriétés supplémentaires qui en font un outil puissant pour l'approximation uniforme des fonctions analytiques et donc des fonctions de \mathbb{M} . Les résultats que nous allons présenter

sur ces propriétés sont tirés pour l'essentiel de l'ouvrage de T. Rivlin [57]. Nous les avons adaptés aux fonctions de \mathbb{M} .

Introduisons quelques notations. Pour commencer,

$$\|f\|_K = \max_{x \in K} |f(x)|$$

désignera la norme uniforme définie pour les fonctions continues sur le compact K . Comme il sera beaucoup question, dans la présente section, d'approximation sur le segment $[-1, 1]$, $\|\cdot\|$ désignera par défaut la norme relative au segment $[-1, 1]$. Nous noterons

$$s_m(f) = \sum_{n=0}^m {}'c_n(f)T_n$$

la série de Chebyshev de f tronquée à l'ordre m . Enfin nous posons

$$\begin{aligned} S_m(f) &= \|f - s_m(f)\|, \\ E_m(f) &= \|f - p_m^*(f)\| \end{aligned}$$

où $p_m^*(f)$ est la meilleure approximation polynomiale de degré m de f sur $[-1, 1]$. Nous adaptons aux fonctions de \mathbb{M} et concentrons en un seul théorème des résultats donnés par Rivlin.

Théorème 3

Soit f une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[-1, 1]$. Alors les sommes partielles $s_m(f)$ convergent uniformément vers f sur $[-1, 1]$. De plus nous avons l'encadrement

$$E_m(f) \leq S_m(f) < \left(4 + \frac{4}{\pi^2} \log m\right) E_m(f) \quad (3.11)$$

Démonstration :

L'inégalité (3.11) est donnée par Rivlin dans un théorème [57, Theorem 3.3] pour les fonctions continues sur $[-1, 1]$ donc applicable à la fonction f . Un second théorème [57, Theorem 3.4] indique que $s_m(f)$ converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \log(m) \omega\left(\frac{1}{m}\right) = 0 \quad (3.12)$$

où ω est le module de continuité de f sur $[-1, 1]$. Or f , analytique sur $[-1, 1]$, y est Lipschitzienne *i.e.* qu'il existe une constante K telle que

$$\forall x, y \in [-1, 1], \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Ainsi nous avons une majoration du module de continuité

$$\omega\left(\frac{1}{m}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{x, y \in [-1, 1] \\ |x - y| \leq \frac{1}{m}}} |f(x) - f(y)| \leq \frac{K}{m}$$

qui implique la nullité de la limite (3.12). □

L'inégalité (3.11) montre que les séries de Chebyshev tronquées fournissent pour les fonctions analytiques des approximations polynomiales proche de la meilleure (d'où l'appellation "near minimax polynomial approximation" souvent utilisée dans la littérature). A titre d'illustration, pour des valeurs de m inférieures à 100, l'inégalité (3.11) donne

$$E_m(f) \leq S_m(f) < 6E_m(f). \quad (3.13)$$

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

Exemple 4 La figure 4 présente les erreurs d'approximation par la série de Chebyshev tronquée ainsi que la meilleure approximation polynomiale de degré 5 de la fonction

$$f(x) = \exp\left(-\frac{3x}{7+x}\right).$$

Sur cet exemple le polynôme $s_5(f)$ est presque la meilleure approximation et présente le

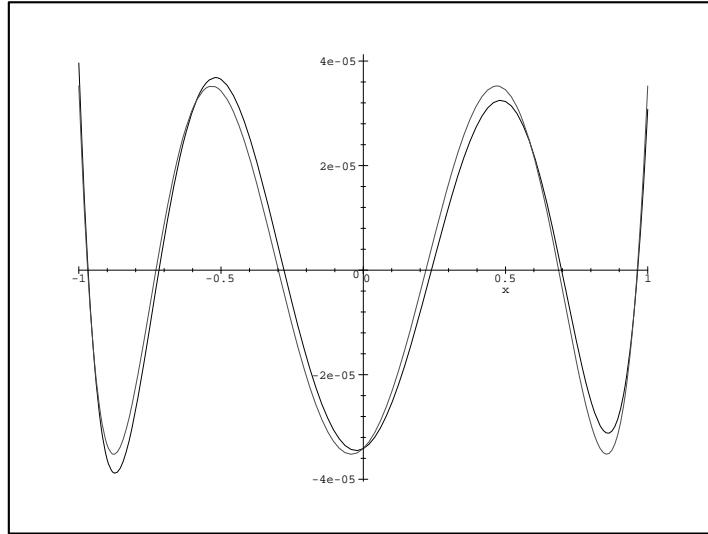


FIG. 3.1 – Erreurs d'approximation de degré 5 de $\exp\left(-\frac{3x}{7+x}\right)$ par une série de Chebyshev tronquée (en trait plein) et par la meilleure approximation polynomiale (en pointillé).

comportement oscillatoire caractéristique de celle-ci.

Dans le cas des fonctions de \mathbb{M} nous pouvons, de plus, obtenir une majoration de l'erreur $S_m(f)$ dépendant de la distance (dans un sens que nous allons préciser) des singularités de f à l'intervalle $[-1, 1]$. Pour cela nous allons introduire quelques éléments de géométrie du plan complexe.

Définition 9

|| Pour tout $\rho > 1$, \mathcal{E}_ρ désigne l'ellipse de foyers -1 et 1 dont la somme des longueurs du grand axe et du petit axe vaut 2ρ .
|| Nous noterons $\bar{\mathcal{E}}_\rho$ le disque elliptique limité par \mathcal{E}_ρ i.e. la partie du plan constituée de \mathcal{E}_ρ et de son intérieur (au sens géométrique).
|| Par convention, nous posons $\mathcal{E}_1 = \bar{\mathcal{E}}_1 = [-1, 1]$.

Pour $\rho > 1$, exprimons les longueurs α du grand axe et β du petit axe de \mathcal{E}_ρ en fonction de ρ . Pour cela, nous rappelons que le carré de la distance entre les foyers d'une ellipse est égale au carré de la longueur du grand axe moins le carré de la longueur du petit axe. Ce qui revient à dire ici que $\alpha^2 - \beta^2 = 4$. Comme la définition de \mathcal{E}_ρ nous indique que $\alpha + \beta = 2\rho$, il vient

$$\alpha = \rho + \rho^{-1} \quad \text{et} \quad \beta = \rho - \rho^{-1}.$$

On notera que α et β sont des fonctions croissantes de ρ . Donc l'ellipse \mathcal{E}_{ρ_1} est à l'intérieure de l'ellipse \mathcal{E}_{ρ_2} si et seulement si ρ_1 est strictement inférieure à ρ_2 . Cette propriété reste vraie dans le cas limite où $\rho_1 = 1$.

Définition 10

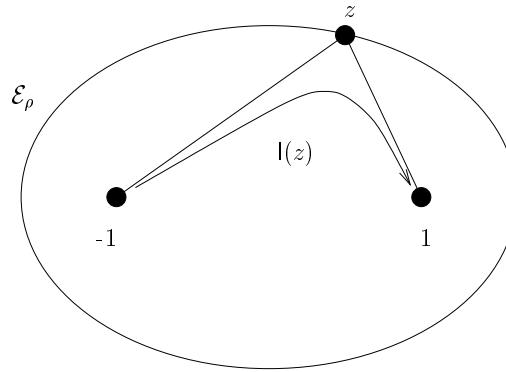
Nous noterons r la fonction définie \mathbb{C} par

$$r(z) = \frac{|z| + \sqrt{|z|^2 - 4}}{2}$$

où

$$|z| = |z - 1| + |z + 1|.$$

(La fonction r est bien définie puisque, par application de l'inégalité triangulaire, $|z|$ est supérieure ou égale à 2.)



Une autre propriété bien connue des ellipses est que la somme des distances d'un point de l'ellipse aux foyers est égale à la longueur du grand axe. Autrement dit, l'ellipse \mathcal{E}_ρ est l'ensemble de points z tels que $|z| = \rho + \rho^{-1}$ i.e. tels que $r(z) = \rho$. Nous introduisons maintenant la transformation du plan complexe définie par la fonction

$$w(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (3.14)$$

qui est fortement liée aux ellipses \mathcal{E}_ρ ainsi qu'aux polynômes de Chebyshev. En effet

Lemme 2

Le cercle de centre 0 et de rayon ρ est désigné par la notation Γ_ρ . Alors pour tout $\rho \geq 1$, on a

$$\mathcal{E}_\rho = w(\Gamma_\rho) = w\left(\Gamma_{\frac{1}{\rho}}\right).$$

Démonstration :

Soit x un point du cercle Γ_ρ . Posons $z = w(x)$. Calculons $|z|$.

$$\begin{aligned} |z| &= \left| \frac{x + x^{-1}}{2} - 1 \right| + \left| \frac{x + x^{-1}}{2} + 1 \right| \\ &= \frac{1}{2|x|} \left(|x - 1|^2 + |x + 1|^2 \right) = \frac{1}{|x|} (|x|^2 + |1|^2) \\ &= |x| + \frac{1}{|x|} = \rho + \rho^{-1} \end{aligned}$$

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

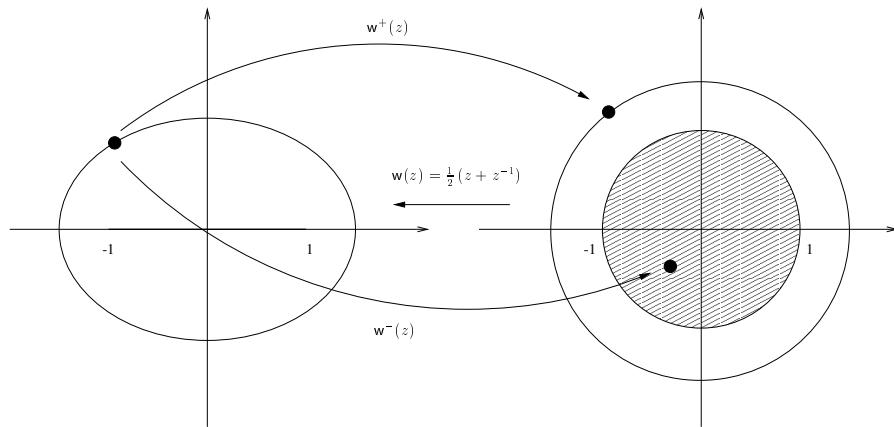
(dans la deuxième ligne de calcul nous avons utilisé la propriété du parallélogramme qui indique que $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$). Ce calcul montre que z est élément de \mathcal{E}_ρ . Donc $w(\Gamma_\rho)$ est inclus donc \mathcal{E}_ρ . Remarquons que le calcul précédent montre l'inclusion de $w(\Gamma_{\rho^{-1}})$ dans \mathcal{E}_ρ puisqu'il est invariant par substitution de ρ^{-1} à ρ .

Maintenant considérons un point z de l'ellipse \mathcal{E}_ρ et cherchons ces antécédents par la fonction w . Ceux-ci sont les solutions de l'équation

$$x^2 - 2zx + 1 = 0$$

qui est une équation du second degré réciproque. Donc elle possède deux solutions (éventuellement confondues) inverses l'une de l'autre. Soit x^* l'une des racines, puisque $w(x^*) = z$ alors d'après le calcul précédent $|x^*| + |x^*|^{-1} = \rho + \rho^{-1}$ ce qui implique nécessairement que $|x^*| = \rho$ ou $|x^*| = \rho^{-1}$. \square

Remarque 7 Une adaptation simple de la démonstration précédente nous donne un propriété qui nous sera utile. Si z est un nombre complexe n'appartenant pas à $[-1, 1]$ alors l'équation $w(x) = z$ a deux solutions : l'une de module strictement supérieur à 1 notée $w^+(z)$ et l'autre de module strictement inférieur à 1 notée $w^-(z)$.



Proposition 15

Pour tout x complexe non nul, nous avons

$$T_n(w(x)) = w(x^n) \quad (3.15)$$

ou autrement écrit

$$T_n\left(\frac{x + x^{-1}}{2}\right) = \frac{x^n + x^{-n}}{2}.$$

Démonstration :

Les polynômes de Chebyshev sont définis par la récurrence

$$T_{n+2}(z) = 2zT_{n+1}(z) - T_n(z)$$

avec $T_0 = 1$ et $T_1(z) = z$. En choisissant x tel que $w(x) = z$, nous voyons immédiatement que (3.15) est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Un calcul simple établit que

$$w(x^{n+2}) = 2w(x)w(x^{n+1}) - w(x^n) = 2zw(x^{n+1}) - w(x^n).$$

Ainsi $T_n(z)$ et $w(x^n)$ vérifient la même récurrence avec les mêmes conditions initiales. Ces deux quantités sont donc égales. \square

Remarquons que la proposition précédente appliquée au cas particulier où $x = e^{i\theta}$ permet d'établir le résultat suivant

$$T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$$

évoqué plus haut. Nous aurions d'ailleurs pu établir la proposition 15 à partir de cette égalité par un argument de prolongement analytique. Enfin, le lien entre les ellipses \mathcal{E}_ρ et les polynômes de Chebyshev apparaît dans le lemme suivant

Lemme 3

||| Soit $\rho \geq 1$. Pour tout z appartenant à \mathcal{E}_ρ , nous avons les inégalités

$$|T_n(z)| \leq \rho^n$$

et

$$\|T_n\|_{\mathcal{E}_\rho} \leq \rho^n.$$

Démonstration :

Dans le cas $\rho = 1$, ce résultat est évident puisque pour tout z appartenant à $[-1, 1]$,

$$|T_n(z)| = |\cos(n \arccos z)| \leq 1.$$

Supposons, maintenant que $\rho > 1$. Pour tout z appartenant à l'ellipse \mathcal{E}_ρ , il existe un point x du cercle Γ_ρ tel que $z = w(x)$ donc

$$|T_n(z)| \leq \frac{1}{2} \left(|x|^n + \frac{1}{|x|^n} \right) \leq |x|^n = \rho^n$$

D'après le principe du maximum, cette inégalité vaut non seulement pour z sur l'ellipse mais aussi z sur le disque elliptique $\bar{\mathcal{E}}_\rho$, ce qui achève la démonstration. \square

Un premier théorème donne des indications sur la décroissance des coefficients de Chebyshev d'une fonction analytique.

Théorème 4 Rivlin [57, Theorem 3.8]

||| Si f est analytique sur le disque elliptique $\bar{\mathcal{E}}_\rho$ pour un certain $\rho > 1$, alors

$$|c_n(f)| \leq \frac{2M}{\rho^n} \quad \text{où} \quad M = \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)|. \quad (3.16)$$

Pour une fonction de \mathbb{M} nous pouvons préciser, en fonction des singularités, les disques elliptiques sur lesquels la fonction est analytique.

Théorème 5

||| Soit f une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[-1, 1]$. Posons

$$\rho^* = \min_{s \in \text{Sg}(f)} r(s). \quad (3.17)$$

Alors pour tout ρ strictement inférieur à ρ^* , nous avons

$$|c_n(f)| \leq \frac{2M}{\rho^n} \quad \text{où} \quad M = \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |f(z)|. \quad (3.18)$$

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

Démonstration :

Pour toute singularité s , $r(s) > 1$ puisque s est extérieure à $[-1, 1]$. Et comme il y a un nombre fini de singularités, $\rho^* = \min r(s)$ est strictement supérieur à 1. Si s est une singularité de f alors $r(s) \geq \rho^*$ donc s est sur ou l'extérieur de \mathcal{E}_{ρ^*} . Ainsi sur tout disque elliptique $\bar{\mathcal{E}}_\rho$ la fonction f est analytique et le théorème 4 s'applique. \square

Remarque 8 Si $\text{Sg}(f)$ est vide, alors le théorème reste vrai avec $\rho^* = \infty$. Cela signifie que les coefficients $c_n(f)$ décroissent plus vite que toute suite géométrique.

Remarque 9 Un résultat de Rivlin montre, après adaptation, que la quantité ρ^* vérifie

$$\frac{1}{\rho^*} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |c_n(f)|^{1/n}$$

Nous pouvons alors dire que ρ^* représente la **vitesse de décroissance** des coefficients de Chebyshev de la fonctions f .

Les résultats précédents sur la décroissance des coefficients de Chebyshev nous permettent d'assurer la convergence uniforme des séries partielles sur $[-1, 1]$ et même d'obtenir une estimation de l'erreur. Ils nous assurent même une convergence à l'extérieur du segment $[-1, 1]$ et plus précisément sur des disques elliptiques. Donnons un énoncé synthétique en rappelant que nous avons convenu que $\bar{\mathcal{E}}_1 = [-1, 1]$.

Corollaire 3

Soit f une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[-1, 1]$. Le réel ρ^* ayant la même signification que dans le théorème 5, la suite $s_m(f)$ converge normalement vers f sur tout disque elliptique $\bar{\mathcal{E}}_\rho$ avec $\rho < \rho^*$. De plus, pour tout ρ' tel que $\rho < \rho' < \rho^*$, nous avons la majoration d'erreur suivante

$$\|s_m(f) - f\|_{\bar{\mathcal{E}}_\rho} \leq \frac{2M'}{\rho' - 1} \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^m \quad \text{avec} \quad M' = \max_{z \in \bar{\mathcal{E}}_{\rho'}} |f(z)|. \quad (3.19)$$

Remarque 10 Dans le cas particulier où $\rho = 1$, il s'avère que la vitesse de décroissance des coefficients de Chebyshev de f peut être vue comme la **vitesse de convergence** de la série de Chebyshev de f sur $[-1, 1]$.

Démonstration :

Nous devons montrer (1) que la série de Chebyshev converge normalement sur le disque elliptique (2) vers f (3) avec l'erreur indiquée.

Soit z un point appartenant à $\bar{\mathcal{E}}_\rho$. En appliquant le théorème 5 et le lemme 3 nous obtenons la majoration suivante

$$\sum_{n=0}^m |c_n(f)| |T_n(z)| \leq \sum_{n=0}^m M' \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^n$$

qui assure la convergence normale des sommes partielles $s_m(f)$ sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho$.

Les fonctions $s_m(f)$ étant analytiques (car polynômales) sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho$, elles convergent donc vers une fonction analytique sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho$. Comme d'après le théorème 4, la suite $s_m(f)$ converge

vers f sur $[-1, 1]$ par application du principe du prolongement analytique, elle converge vers f sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho$. \square

Geddes [28] a même montré que la somme partielle $s_m(f)$ a un comportement proche de celui de la meilleure approximation polynomiale de f sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho$, ce qui généralise le résultat plus connu sur $[-1, 1]$.

3.2.1 Séries de Chebyshev sur un segment $[a, b]$

On étend facilement la définition des séries de Chebyshev à un segment quelconque $[a, b]$ de \mathbb{C} en utilisant une similitude qui transforme le segment $[a, b]$ en $[-1, 1]$. Du fait des nombreuses applications que nous ferons de cette adaptation à des segments arbitraires, nous allons préciser les définitions et les outils nécessaires.

Ainsi nous notons $h_{a,b}$, où a et b sont des nombres complexes distincts, la fonction affine définie par

$$h_{a,b}(z) = \frac{b-a}{2}z + \frac{a+b}{2} \quad (3.20)$$

qui envoie -1 sur a et 1 sur b . Considérons une fonction f de \mathbb{M} analytique sur $[a, b]$. La fonction $f \circ h_{a,b}$ est alors analytique sur $[-1, 1]$ et sa série de Chebyshev

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n(f \circ h_{a,b})T_n(x)$$

converge uniformément vers $f \circ h_{a,b}$ sur $[-1, 1]$. Il est clair alors que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n(f \circ h_{a,b})T_n(h_{a,b}^{-1}(x)) . \quad (3.21)$$

convergence uniformément vers f sur $[a, b]$. Nous dirons que la série (3.21) est la série de Chebyshev de f sur $[a, b]$. Les propriétés d'approximation se transposent sur $[a, b]$ et nous donnons sous forme explicite les bornes d'erreur

Proposition 16

Soit f une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[a, b]$. Posons

$$\rho^* = \min_{s \in S(f)} r(h_{a,b}^{-1}(s)) ,$$

alors pour tout ρ strictement inférieur à ρ^* , on a

$$|c_n(f \circ h_{a,b})| \leq \frac{2M}{\rho^n} \quad \text{où} \quad M = \max_{z \in h_{a,b}(\mathcal{E}_\rho)} |f(z)| . \quad (3.22)$$

Démonstration :

La fonction $g = f \circ h_{a,b}$ est une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[-1, 1]$. Puisque

$$\rho^* = \min_{s \in S(g)} r(s) = \min_{s \in S(f)} r(h_{a,b}^{-1}(s))$$

et

$$M = \max_{z \in \mathcal{E}_\rho} |g(z)| = \max_{z \in h_{a,b}(\mathcal{E}_\rho)} |f(z)|$$

3.2 Approximation uniforme par les séries de Chebyshev

par application du théorème 5 l'inégalité (3.22) est vérifiée. \square

Corollaire 4

Soit f une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[a, b]$. Le réel ρ^* ayant la même signification que dans la proposition 16, la suite $s_m(f, [a, b])$ converge normalement vers f sur tout disque elliptique $h_{a,b}(\mathcal{E}_\rho)$ avec $\rho < \rho^*$. De plus, pour tout ρ' tel que $\rho < \rho' < \rho^*$, nous avons la majoration d'erreur suivante

$$\|s_m(f) - f\|_{h_{a,b}(\mathcal{E}_\rho)} \leq M' \left(\frac{\rho}{\rho'} \right)^m \quad \text{avec} \quad M' = \max_{z \in h_{a,b}(\mathcal{E}_{\rho'})} |f(z)|. \quad (3.23)$$

Nous donnons un exemple qui montre que l'on peut obtenir une meilleure approximation hors du segment de définition d'une série de Chebyshev que sur le segment (de même longueur) d'une autre série.

Exemple 5 Nous voulons évaluer la fonction $f(x) = \arctan(x/2)$ sur le segment $[-i, i]$, en utilisant soit S_1 la série de Chebyshev de f sur $[-1, 1]$, soit S_2 la série de Chebyshev de f sur $[-i, i]$. La fonction f présente des singularités en $2i$ et $-2i$. Conformément aux propositions 5 et 16, nous établissons que les vitesses de convergence de S_1 et S_2 sur leurs intervalles de définition sont respectivement

$$\rho_1 = r(\pm 2i) = 2 + \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \rho_2 = r(\pm 2) = 2 + \sqrt{3}$$

Ces résultats sont corroborés par l'expression des 2 séries de Chebyshev

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{5} - 2)^{2n+1}}{2n+1} T_{2n+1}, \\ S_2 &= 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \sqrt{3})^{2n+1}}{2n+1} T_{2n+1}. \end{aligned}$$

D'après le corollaire 3 relatif à la convergence sur les disques elliptiques, l'erreur d'approximation de $f(z)$ par les sommes partielles de la série S_1 est majorée par une suite géométrique de raison $\frac{1}{\rho_2}$ sur le disque elliptique $\bar{\mathcal{E}}_\rho$ pour $\rho = \rho_1/\rho_2$. Donc si notre critère de choix est la vitesse de convergence, nous utiliserons S_1 pour évaluer f sur $\bar{\mathcal{E}}_\rho \cap [-i, i]$ c'est-à-dire sur $[-i\varepsilon, i\varepsilon]$ avec $\varepsilon = \frac{1}{2}(\rho - 1/\rho) \sim 0.1270..$ et S_2 sur le reste de l'intervalle $[-i, i]$. L'expérience indique que ce choix est pertinent.

Notons $E_{1,m}(x)$ (respectivement $E_{2,m}(x)$) la différence (donc l'erreur) entre $f(x)$ et $S_1(x)$ (resp. $S_2(x)$) tronquée à l'ordre m . La figure 3.2 présente les tracés de $E_{k,6}$, $8E_{k,8}$ et $80E_{k,10}$ sur $[0, 0.2i]$ (nous avons focalisé le tracé sur ce segment car sur $[0.2i, i]$ $E_{2,m}(x)$ est toujours inférieure à $E_{1,m}(x)$). Les courbes convexes correspondent aux $E_{1,m}(x)$ et les courbes concaves aux $E_{2,m}(x)$. Dans les 3 cas, $E_{1,m}(x)$ est inférieure à $E_{2,m}(x)$ sur la partie gauche du segment. L'inversion d'ordre se fait en un point (marqué par un petit carré) dont l'abscisse se rapproche de ε par valeurs décroissantes.

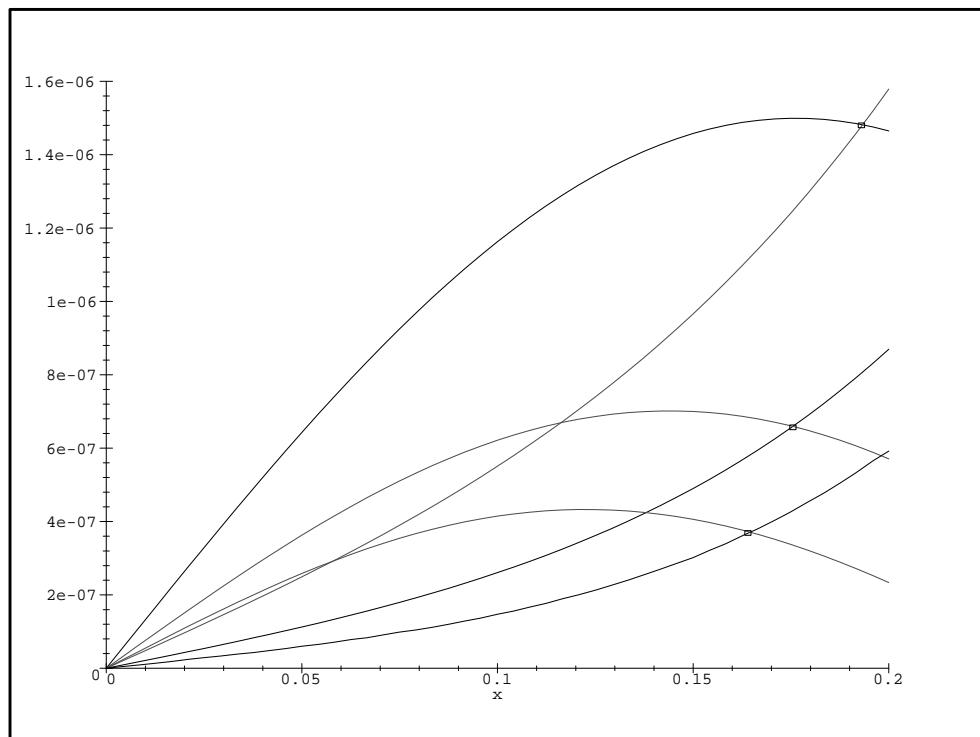


FIG. 3.2 – Erreurs commises dans l'approximation de \arctan par les séries partielles de S_1 et S_2 sur $[0, 0.2i]$.

3.3 Séries de Chebyshev et opérateurs différentiels

3.3.1 Le schéma général

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, les polynômes de Chebyshev sont les polynômes de type hypergéométrique définis par le triplet

$$\left(x^2 - 1, x, \frac{1}{2^n (1/2)_n} \right).$$

De ce fait nous pourrions établir les formules de récurrences vérifiées par les polynômes de Chebyshev et leurs dérivées grâce aux propositions 9, 10 et 11 du chapitre 1. Nous allons néanmoins établir ces résultats à partir des propriétés trigonométriques des polynômes de Chebyshev comme nous l'avons déjà fait pour la récurrence à trois termes (3.6).

Commençons par la remarque suivante dont nous ferons un grand usage par la suite. La relation $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ vue plus haut permet de définir, de manière naturelle quoique conventionnelle, T_n pour des valeurs négatives de n en posant $T_{-n} = T_n$.

Dérivons les polynômes de Chebyshev

$$\frac{d}{dx} T_n(x) = \frac{-1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \cos n\theta = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Cette formule permet là aussi de poser $T'_{-n} = T'_n$. Introduisons la notation suivante

$$\{n\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ n & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

alors en utilisant la formule trigonométrique

$$2 \sin(\theta) \cos(n\theta) = \sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)$$

nous obtenons la relation de dérivation

$$T_n = \frac{T'_{n+1}}{2\{n+1\}} - \frac{T'_{n-1}}{2\{n-1\}} \quad (3.24)$$

valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

Nous faisons ici une légère digression pour définir les polynômes de Chebyshev de seconde espèce

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{T'_{n+1}(x)}{\{n+1\}}$$

ainsi que quelques propriétés de ces polynômes dont nous aurons l'usage à plusieurs reprises. D'une part, nous savons d'après la théorie sur les polynômes hypergéométriques que ces polynômes sont orthogonaux relativement au poids $\sqrt{1-x^2}$. D'autre part, nous avons la

Proposition 17

||| Les polynômes $U_n(x)$ sont comme les polynômes $T_n(x)$ solutions de la récurrence

$$u_{n+2} = 2xu_{n+1} - u_n. \quad (3.25)$$

||| Et pour tout z complexe non nul

$$U_n(w(z)) = \frac{z^{n+1} - z^{-(n+1)}}{z - z^{-1}}. \quad (3.26)$$

Démonstration :

Comme nous l'avons fait pour les T_n , il est facile de déduire de la formule trigonométrique

$$2 \cos \theta \sin n\theta = \sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta$$

que les $U_n(x)$ vérifient (3.6). En constatant, comme dans la proposition 15, que le second membre de l'égalité (3.26) vérifie la récurrence (3.25) pour $x = w(z)$, et que l'égalité (3.26) est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$, nous concluons qu'elle est vraie pour tout n . \square

Nous désignons par $T_n^{(k)}$ la dérivée d'ordre k du polynôme T_n . Nous généralisons la relation (3.24) aux dérivées d'ordres supérieurs par dérivations itérées

$$T_n^{(k-1)} = \frac{T_{n+1}^{(k)}}{2\{n+1\}} - \frac{T_{n-1}^{(k)}}{2\{n-1\}}. \quad (3.27)$$

Les récurrences à trois termes pour les $T_n^{(k)}$ s'obtiennent en dérivant k fois la récurrence à trois termes pour les T_n , ce qui donne

$$xT_n^{(k)} + kT_n^{(k-1)} = \frac{T_{n+1}^{(k)} + T_{n-1}^{(k)}}{2}. \quad (3.28)$$

Après avoir remplacé le terme $T_n^{(k-1)}$ par le second membre de la formule (3.24), nous obtenons

$$xT_n^{(k)} = \frac{(\{n+1\} - k)T_{n+1}^{(k)}}{2\{n+1\}} + \frac{(\{n-1\} + k)T_{n-1}^{(k)}}{2\{n-1\}}. \quad (3.29)$$

On remarquera que, dans le cas des polynômes de Chebyshev, nous avons utilisé les relations de dérivation pour construire les récurrences à trois termes des polynômes dérivés, alors que nous avions obtenu, à l'inverse, les relations de dérivation pour les polynômes hypergéométriques grâce aux récurrences à trois termes des polynômes dérivés.

Conformément aux résultats de la première partie nous allons pouvoir établir pour les séries de Chebyshev des formules issues des relations précédentes. Avant de donner dans une proposition la synthèse de ces résultats, indiquons que, pour les dérivées des polynômes de Chebyshev, nous n'effectuerons pas de recalage d'indices. De ce fait une série en $T_n^{(k)}$ est sommée en partant de l'indice $n = k$. Nous adoptons cet usage parce qu'il met en exergue des propriétés de symétrie dans les opérateurs aux différences que nous allons générer.

Proposition 18

Les séries de Chebyshev vérifient les formules suivantes

$$\sum_{n=k}^{\infty} {}'c_n T_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta(c_n) T_n^{(k+1)}(x) \quad (3.30)$$

$$x \sum_{n=k}^{\infty} {}'c_n T_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} {}'X_k(c_n) T_n^{(k)}(x) \quad (3.31)$$

où Δ et X_k sont les opérateurs aux différences définis par

$$\Delta(c_n) = \frac{c_{n-1} - c_{n+1}}{2n},$$

$$X_k(c_n) = \begin{cases} \frac{c_{n+1} + c_{n-1}}{2} & \text{si } k = 0 \\ \frac{(n+k)c_{n+1} + (n-k)c_{n-1}}{2n} & \text{si } k > 0 \end{cases}.$$

Ces formules sont valides avec la convention $c_{-n} = c_n$.

Démonstration :

Commençons par établir les formules impliquant une série de Chebyshev (non dérivée)

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n(x)$$

qui peut se réécrire, du fait des conventions prises,

$$\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T_n.$$

Pour la multiplication par x , la récurrence à trois termes (3.6) s'écrit, en termes d'opérateurs aux différences,

$$x T_n = \left(\frac{E + E^{-1}}{2} \right) T_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Notons X_0 l'opérateur aux différences qui apparaît dans le membre de droite. Il appert que l'opérateur adjoint de X_0 est X_0 lui-même. Ainsi, en appliquant la proposition 2 nous avons

$$\begin{aligned} x \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T_n &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n X_0(T_n) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_0(c_n) T_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}'X_0(c_n) T_n, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ce qui établit la formule de multiplication cherchée. L'opérateur sous-jacent dans la relation de dérivation (3.24) est

$$\frac{E}{2\{n+1\}} - \frac{E^{-1}}{2\{n-1\}}$$

et nous notons Δ son adjoint qui est

$$\frac{E^{-1} - E}{2\{n\}}$$

En effectuant un calcul similaire à (3.32) dans lequel Δ joue le rôle de X_0 , nous obtenons *mutatis mutandi*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \Delta(c_n) T_n' .$$

Et comme $T_0' = 0$, cela établit le cas $k = 0$ de la formule (3.31). Les autres cas de la formule (3.31) s'obtiennent alors par dérivations successives.

L'opérateur aux différences correspondant à la multiplication de $T_n^{(k)}$ par x est d'après la formule (3.29)

$$\frac{(\{n+1\} - k)E}{2\{n+1\}} + \frac{(\{n-1\} + k)E^{-1}}{2\{n-1\}}$$

et son opérateur adjoint

$$X_k = \frac{(\{n\} - k)E^{-1}}{2\{n\}} + \frac{(\{n\} + k)E}{2\{n\}} .$$

D'où en utilisant la proposition 2

$$x \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} X_k(c_n) T_n^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \left(\frac{(\{n\} - k)c_{n-1}}{2\{n\}} + \frac{(\{n\} + k)c_{n+1}}{2\{n\}} \right) T_n^{(k)} \quad (3.33)$$

et comme l'indice n ne prend que des valeurs strictement positives nous pouvons retirer les accolades. \square

Avant de continuer, faisons la remarque suivante. L'opérateur qui permet de changer de base pour transformer une série en $T_n^{(k)}$ en une série en $T_n^{(k+1)}$ est indépendant de k car nous n'avons pas introduit de normalisation avec les dérivées. Nous avons noté cette opérateur Δ et non B comme dans le premier chapitre pour des raisons "historiques" car il vient en quelque sorte compenser une dérivation. Nous n'avons pas réutilisé la notation Δ dans le premier chapitre pour éviter la confusion avec les opérateurs D de normalisations.

Avec les opérations élémentaires sur les séries, nous pouvons appliquer un opérateur différentiel à une série suivant le schéma général.

Proposition 19

Soit L l'opérateur différentiel holonome

$$p_r(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^r + \cdots + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \quad (3.34)$$

et \mathcal{L} l'opérateur aux différences

$$p_r(X_r) + \cdots + p_1(X_r) \Delta^{r-1} + p_0(X_r) \Delta^r$$

construit avec les opérateurs définis dans la proposition 18. Alors le résultat de l'application de L à une série de Chebyshev s'obtient comme suit

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n T_n \right) = \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(c_n) T_n^{(r)} .$$

3.3 Séries de Chebyshev et opérateurs différentiels

Démonstration :

Le résultat s'obtient par calcul direct

$$\begin{aligned}
 L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n \right) &= \sum_{k=0}^r p_k(x) \sum_{n=k}^{\infty} {}'c_n T_n^{(k)} \\
 &= \sum_{k=0}^r p_k(x) \sum_{n=r}^{\infty} \Delta^{r-k}(c_n) T_n^{(r)} \\
 &= \sum_{k=0}^r \sum_{n=r}^{\infty} p_k(X_r) \Delta^{r-k}(c_n) T_n^{(r)} \\
 &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(c_n) T_n^{(r)}.
 \end{aligned}$$

Ce calcul est plus simple que le cas hypergéométrique général présenté dans le chapitre 1 du fait de l'indépendance de Δ par rapport à k . \square

Contrairement à ce que nous avions fait au chapitre 1, nous voulons légitimer le procédé décrit ci-dessus vis-à-vis de la convergence. Pour cela, commençons par donner un résultat fondé sur le théorème de Markov. Nous définissons les polynômes Π_k comme suit

$$\begin{cases} \Pi_0 \equiv 1 \\ \Pi_k(n) = \prod_{i=0}^{k-1} (n^2 - i^2) \quad \forall k \geq 1 \end{cases}. \quad (3.35)$$

Nous avons alors la proposition suivante due à Rivlin [57].

Proposition 20

$$\begin{aligned}
 &\left\| \begin{aligned} &\text{Les polynômes de Chebyshev ainsi que leurs dérivées successives vérifient l'inégalité} \\ &\text{suivante} \end{aligned} \right. \\
 &\left\| \begin{aligned} &||T_n^{(k)}||_{[-1,1]} = T_n^{(k)}(1) = \frac{\Pi_k(n)}{k!!} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n \geq k. \end{aligned} \right. \quad (3.36)
 \end{aligned}$$

Grâce à cette proposition nous pouvons affirmer que si $S(x)$ est la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n(x)$$

dans laquelle les coefficients c_n sont à décroissance géométrique, alors les séries

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)}(x)$$

sont normalement convergentes puisque les termes $|c_n T_n^{(k)}(x)|$ sont majorés par les valeurs $|c_n| \frac{\Pi_k(n)}{k!!}$ qui sont à décroissance géométrique, et leurs sommes sont donc les dérivées successives $S^{(k)}(x)$ de $S(x)$. Par ailleurs, les opérateurs X_k et Δ étant à coefficients rationnels, les opérations formelles (3.30) et (3.31) sont valides vis-à-vis de la convergence chaque fois

que les coefficients c_n sont à décroissance géométrique. Et dans ce cas les suites $X_k(c_n)$ et $\Delta(c_n)$ sont elles-mêmes à décroissance géométrique.

Ainsi dans le cas de séries aux coefficients à décroissance géométrique, nous pouvons remplacer dans la proposition 19 les séries formelles par leurs sommes.

Proposition 21

Soit L et \mathcal{L} les opérateurs définis dans la proposition 19. Supposons que les coefficients de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x)$$

sont à décroissance géométrique. Nommons $S(x)$ sa somme. Alors

$$LS(x) = \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(c_n) T_n^{(r)}(x)$$

où la suite $\{\mathcal{L}(c_n)\}$ est à décroissance géométrique.

Remarque 11 Le résultat précédent pourrait s'énoncer avec convergence sur des disques elliptiques en appliquant le corollaire 3.

Proposition 22 Récurrence de Chebyshev

Soit L l'opérateur différentiel holonome défini par (3.34). On suppose que le polynôme p_r ne s'annule pas sur $[-1, 1]$. Soit q un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ qui se développe dans la base $\{T_n^{(r)}\}$ sous la forme

$$q(x) = \sum_{n=r}^{\infty} q_n T_n^{(r)}(x) \quad \text{avec } q_n = 0 \text{ pour } n > \deg(q).$$

Soit enfin σ une solution de l'équation différentielle $Ly = q$. Alors les coefficients de Chebyshev de σ vérifient l'équation aux différences

$$\mathcal{L}(c_n) = q_n, \quad \forall n \geq r \tag{3.37}$$

que nous nommerons "récurrence de Chebyshev".

Démonstration :

Puisque l'équation différentielle $Ly = q$ est régulière sur $[-1, 1]$ (du fait que p_r ne s'annule pas sur ce segment), σ est une fonction de \mathbb{M} analytique sur $[-1, 1]$. Donc ses coefficients de Chebyshev c_n sont à décroissance géométrique. En appliquant la proposition 21, nous avons

$$L\sigma = \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(c_n) T_n^{(r)} = \sum_{n=r}^{\infty} q_n T_n^{(r)}.$$

Les deux séries étant normalement convergentes, l'orthogonalité des $T_n^{(r)}$ nous permet d'identifier les termes et donc d'établir l'équation (3.37). \square

Cette proposition est le point de départ des travaux que nous développerons dans les chapitres suivants. Généralisons la proposition aux séries de Chebyshev sur $[a, b]$. Nous

3.3 Séries de Chebyshev et opérateurs différentiels

savons que les coefficients de Chebyshev de σ sur $[a, b]$ sont les coefficients de Chebyshev de $\sigma \circ h_{a,b}$ sur $[-1, 1]$. Or, si σ vérifie l'équation différentielle $Ly = q$ alors $\sigma \circ h_{a,b}$ est solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^r p_i(h(x)) (h')^{-i} y^{(i)}(x) = q(h(x)) \quad (3.38)$$

où nous avons posé $h = h_{a,b}$ et où h' est la dérivée (constante) de h . Nous établissons alors la

Proposition 23

Soit L l'opérateur différentiel holonome défini par (3.34). On suppose que le polynôme p_r ne s'annule pas sur $[a, b]$. Soit q un polynôme de $\mathbb{C}[x]$ tel que

$$q(h_{a,b}(x)) = \sum_{n=r}^{\infty} q_n^{a,b} T_n^{(r)}(x), \quad \text{avec } q_n^{a,b} = 0 \text{ pour } n > \deg(q).$$

Soit enfin σ une solution de l'équation différentielle $Ly = q$. Alors les coefficients de Chebyshev de σ sur $[a, b]$ vérifient l'équation aux différences

$$\mathcal{L}_{a,b}(c_n) = q_n^{a,b}, \quad \forall n \geq r \quad (3.39)$$

où

$$\mathcal{L}_{a,b} = \sum_{k=0}^r p_k \left(\frac{b-a}{2} X_r + \frac{a+b}{2} \right) \left(\frac{2}{b-a} \right)^{r-k} \Delta^{r-k}. \quad (3.40)$$

Cette proposition n'apporte pas un supplément fondamental sur le plan théorique mais elle trouvera son utilité dans les applications numériques.

3.3.2 Utilisation de la relation de structure

Nous avions évoqué dans le chapitre 1, la possibilité d'utiliser la relation de structure pour appliquer une classe d'opérateurs différentiels à une série orthogonale. Nous allons détailler ce point dans le cas des séries de Chebyshev.

Proposition 24 Relation de structure pour les polynômes de Chebyshev

Pour tout n entier, nous avons

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} T_n = \boldsymbol{\sigma} T_n$$

où l'opérateur aux différences $\boldsymbol{\sigma}$ est défini par

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{n}{2} (E - E^{-1}).$$

Démonstration :

En posant $x = \cos \theta$, il vient

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) \frac{d}{dx} T_n &= -\sin^2 \theta \frac{n \sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= n \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{2}(T_{n+1} - T_{n-1})$$

ce qui montre notre résultat. \square

Nous transposons ce résultat aux séries afin d'obtenir la

Proposition 25

Pour tout n entier, nous avons

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} 'c_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} ' \nabla(c_n) T_n$$

où l'opérateur aux différences ∇ est défini par

$$\nabla = \frac{(n-1)\mathbf{E}^{-1} - (n+1)\mathbf{E}}{2}.$$

Démonstration :

L'opérateur ∇ est l'opérateur adjoint de σ . La démonstration est alors la même, *mutatis mutandi*, que celle qui établit l'usage de l'opérateur X_0 dans la proposition 18. \square

Nous avons nommé ainsi l'opérateur ∇ à cause d'une certaine complémentarité vis-à-vis de l'opérateur Δ dont nous avons voulu garder une trace dans la graphie. Introduisons la notation suivante

$$\Theta = (x^2 - 1) \frac{d}{dx}.$$

La proposition 25 nous permet d'appliquer un opérateur différentiel de $\mathbb{C}[x, \Theta]$ à une série de Chebyshev. Un opérateur de $\mathbb{C}[x, \Theta]$ pouvant s'écrire de manière canonique

$$M = \sum_{k=0}^r m_k(x) \Theta^k$$

nous vérifions aisément que

$$M \left(\sum_{n=0}^{\infty} 'c_n T_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} ' \left[\sum_{k=0}^r m_k(X_0) \nabla^k \right] (c_n) T_n. \quad (3.41)$$

Nous avions déjà vu cette propriété dans le cas général des séries orthogonales. Nous allons donner un résultat complémentaire qui facilite l'emploi de la formule (3.41).

Lemme 4

Pour tout $n \geq 1$,

$$(x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} \in \mathbb{C}[x, \Theta].$$

Démonstration :

Nous posons $\omega_n = (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n}$. Un calcul direct montre que $\omega_1 = \Theta$ et $\omega_2 = \Theta^2 - 2x\Theta$. Ainsi ω_1 et ω_2 appartiennent bien à $\mathbb{C}[x, \Theta]$. Maintenant pour $n > 2$,

$$\begin{aligned} \Theta \omega_{n-1} &= (x^2 - 1) \left((x^2 - 1)^{n-1} \frac{d^n}{dx^n} + 2(n-1)x(x^2 - 1)^{n-2} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \right) \\ &= \omega_n + 2(n-1)x\omega_{n-1} \end{aligned}$$

3.4 Autres propriétés

Autrement dit $\omega_n = (\Theta - 2(n-1)x)\omega_{n-1}$, ce qui montre par récurrence l'appartenance de ω_n à $\mathbb{C}[x, \Theta]$ pour tout n . \square

Remarque 12 La démonstration précédente nous indique au passage que

$$\omega_n = \prod_{k=0}^{n-1} (\Theta - 2kx)$$

où le produit se fait à gauche dans l'ordre croissant de l'indice.

Le lemme 4 nous montre qu'un opérateur L de $\mathbb{C}[x, \frac{d}{dx}]$ d'ordre r se transforme en opérateur de $\mathbb{C}[x, \Theta]$ par multiplication par $(x^2 - 1)^r$ (éventuellement par une puissance moindre). Le schéma (3.41) peut alors être utilisé pour appliquer L à une série de Chebyshev et obtenir un résultat sous forme de série de Chebyshev et non dans une base dérivée. Il y a là une petite contre-vérité car c'est $(x^2 - 1)^r L$ et non L que nous appliquons. Le fait de vouloir rester à tout prix (ici le prix est une complexité accrue) dans la base de Chebyshev peut se justifier, par exemple, dans l'emploi de méthodes spectrales.

3.4 Autres propriétés

Les propriétés que nous avons présentées précédemment étaient l'application aux polynômes et séries de Chebyshev des propriétés vues dans le tout premier chapitre pour les polynômes orthogonaux classiques, auxquelles nous avons ajouté des considérations de convergence. Nous allons maintenant étudier d'autres propriétés spécifiques au cas Chebyshev.

3.4.1 Produit de polynômes de Chebyshev

Le produit de deux polynômes de Chebyshev s'exprime aisément dans la base de Chebyshev, comme l'indique la

Proposition 26

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour tous entiers } r \text{ et } n \\ T_r T_n = \frac{T_{n-r} + T_{n+r}}{2} \end{array} \right.$$

Démonstration :

Usons à nouveau des ressources de la trigonométrie pour établir ce résultat,

$$\begin{aligned} T_r(x)T_n(x) &= \cos r\theta \cos n\theta \\ &= \frac{\cos(n-r)\theta + \cos(n+r)\theta}{2} \\ &= \frac{T_{n-r} + T_{n+r}}{2}. \end{aligned}$$

\square

Remarquons que cette proposition appliquée pour $r = 1$, nous redonne la récurrence à trois termes. Une propriété similaire existe pour tous les polynômes orthogonaux (pas

nécessairement hypergéométriques). Ainsi le produit $P_r P_n$ de deux polynômes orthogonaux s'exprime comme une combinaison de polynômes orthogonaux P_k où k varie de $n - r$ à $n + r$ (nous avons supposé $r \leq n$, supposition inutile dans le cas Chebyshev du fait des conventions prises). Le calcul des coefficients de cette combinaison, qui est en général plus compliquée que dans le cas des polynômes de Chebyshev, s'appelle problème de linéarisation [59].

La transposition du résultat précédent aux séries est immédiat : la démonstration est la même que pour la multiplication par la variable en remplaçant E par E^r . Nous obtenons ainsi la

Proposition 27

Pour tout entier r , le résultat de la multiplication d'une série de Chebyshev par T_r est donné par

$$\begin{aligned} T_r \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n &= \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left[\frac{E^r + E^{-r}}{2} \right] (c_n) T_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}' \frac{c_{n-r} + c_{n+r}}{2} T_n. \end{aligned}$$

Il est amusant de noter que nous aurions pu inverser l'ordre des démonstrations. En effet, d'après la proposition 18

$$T_r \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} {}'T_r(X_0)(c_n) T_n$$

mais par application de (3.15)

$$T_r(X_0) = T_r \left(\frac{E + E^{-1}}{2} \right) = \frac{E^r + E^{-r}}{2}$$

ce qui démontre la proposition 27. Nous déduisons la proposition 26 en application la proposition 27 à la pseudo-série

$$T_n = \sum_{k=0}^{\infty} {}'\delta_{n,k} T_k.$$

Grâce à la proposition 27 nous pouvons obtenir une forme très explicite du résultat du produit d'une série de Chebyshev par un polynôme

Corollaire 5

Soit P un polynôme qui s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^r {}'\beta_k T_k$$

dans la base des polynômes de Chebyshev. Alors, en convenant que $\beta_{-k} = \beta_k$,

$$P(x) \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-r}^r \beta_k c_{n-k} \right) T_n.$$

Application aux fractions rationnelles

Grâce au corollaire 5, nous allons établir la récurrence vérifiée par les coefficients de Chebyshev d'une fraction rationnelle. Les résultats sur la convergence des séries de Chebyshev vont alors nous permettre de déterminer ces coefficients. Considérons donc une fraction rationnelle $\sigma(x) = \frac{D(x)}{B(x)}$ où nous supposerons que $B(x)$ n'a pas de racine sur $[-1, 1]$ de façon à assurer l'existence de la série de Chebyshev de σ . Puisque par division euclidienne nous pouvons écrire

$$\sigma(x) = C(x) + \frac{A(x)}{B(x)}, \quad \deg(A) < \deg(B),$$

le véritable¹ problème est de déterminer la série de Chebyshev de $\frac{A(x)}{B(x)}$, celle de σ s'en déduisant par simple ajout du polynôme $C(x)$. Ainsi nous pouvons supposer sans perte de généralité que $C(x) = 0$. Les singularités de σ sont les racines de $B(x)$, donc par application du théorème 5 les coefficients de Chebyshev s_n de σ sont à décroissance géométrique de vitesse

$$\rho^* = \min_{b \in \text{rac}(B)} r(b).$$

Le polynôme $B(x)$ a le développement suivant dans la base de Chebyshev

$$B = \frac{\beta_0}{2} + \beta_1 T_1 + \cdots + \beta_r T_r$$

tandis que $A(x)$ se développe comme suit

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \alpha_n T_n$$

où α_n est nul pour $n > \deg(A)$. Alors, la fonction σ vérifiant l'équation

$$B(x)\sigma(x) = A(x)$$

que nous pourrions qualifier abusivement d'équation différentielle holonome d'ordre 0, nous établissons, conformément à la proposition 5, l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-r}^r \beta_k s_{n+k} \right) T_n = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \alpha_n T_n.$$

Nous en tirons alors l'équation récurrente

$$\sum_{k=-r}^r \beta_k s_{n+k} = 2\alpha_n, \quad n \geq 0. \quad (3.42)$$

Puisque nous avons supposé A de degré strictement inférieur au degré de B , nous pouvons distinguer dans l'équation récurrente les r équations

$$\sum_{k=-r}^r \beta_k s_{n+k} = 2\alpha_n \quad 0 \leq n \leq r-1 \quad (3.43)$$

¹En fait, le véritable problème est de déterminer dans la série de Chebyshev de $\frac{1}{B(x)}$ que l'on sait multiplier par $A(x)$. Néanmoins nous effectuerons deux étapes en une.

que nous considérerons comme des contraintes imposées aux solutions de l'équation récurrente à coefficients constants

$$\sum_{k=-r}^r \beta_k s_{n+k} = 0 \quad r \leq n \quad (3.44)$$

Suivant la théorie des équations récurrentes à coefficients constants, nous savons que les solutions de (3.44) sont déterminées par les racines du polynôme caractéristique

$$\chi(x) = \sum_{k=-r}^r \beta_k x^{r+k}$$

et leurs multiplicités. Notons immédiatement que 0 n'est pas racine de χ sinon nous aurions $\beta_r = 0$, ce qui contredirait le fait que r est le degré exact de B . D'autre part, le polynôme χ est un polynôme réciproque. Nous pouvons donc prévoir que ses racines sont deux à deux inverses avec la même multiplicité. Détaillons les choses.

Soit $\{b_i\}_{i=1 \dots r_0}$ les racines du polynôme B et μ_i la multiplicité de b_i . Nous savons que les solutions que l'équation

$$\frac{x + x^{-1}}{2} = b_i \quad \Leftrightarrow x^2 - 2b_i x + 1 = 0$$

sont inverses l'une de l'autre. Nous pouvons même être plus précis : d'après la remarque 7, l'hypothèse $b_i \notin [-1, 1]$ implique que l'une des racines est de module strictement inférieur à 1, nous la noterons c_i , l'autre étant alors nécessairement de module strictement supérieur à 1. L'égalité

$$\frac{x + x^{-1}}{2} - b_i = \frac{x^{-1}}{2} (x - c_i)(x - c_i^{-1})$$

obtenue par factorisation, est utilisée dans le calcul suivant

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 2x^r \sum_{k=0}^r {}'T_k \left(\frac{x + x^{-1}}{2} \right) = 2x^r B \left(\frac{x + x^{-1}}{2} \right) \\ &= 2x^r 2^r \beta_r \prod_{i=1}^{r_0} \left(\frac{x + x^{-1}}{2} - b_i \right)^{\mu_i} \\ &= 2x^r 2^r \beta_r \prod_{i=1}^{r_0} \left(\frac{x^{-1}}{2} \right)^{\mu_i} (x - c_i)^{\mu_i} (x - c_i^{-1})^{\mu_i} \\ &= 2\beta_r \prod_{i=1}^{r_0} (x - c_i)^{\mu_i} (x - c_i^{-1})^{\mu_i}. \end{aligned}$$

Le passage de l'avant-dernière à la dernière ligne se fait en remarquant que

$$\prod_{i=1}^{r_0} \left(\frac{x^{-1}}{2} \right)^{\mu_i} = \left(\frac{x^{-1}}{2} \right)^{\sum_{i=1}^{r_0} \mu_i} = \left(\frac{x^{-1}}{2} \right)^r.$$

Ainsi les racines de χ et leurs multiplicités sont entièrement déterminées par les racines (et leurs multiplicités) du polynôme B . L'expression des coefficients s_n de la série de Chebyshev de σ sera donc une combinaison linéaire des $2r$ termes

$$n^{k_i} c_i^n, \quad n^{k_i} c_i^{-n} \quad 1 \leq i \leq r_0, \quad 0 \leq k_i < \mu_i.$$

3.4 Autres propriétés

Mais puisque nous savons que les coefficients s_n sont à décroissance géométrique nous pouvons exclure de la combinaison linéaire les termes $n^{k_i} c_i^{-n}$ qui sont eux à croissance géométrique. Notons $e_i(n)$ (avec une numérotation adéquate) les r termes $n^{k_i} c_i^{-n}$ à décroissance géométrique. Nous avons alors

$$s_n = \sum_{i=1}^r \lambda_i e_i(n)$$

où les λ_i sont déterminés par les r contraintes, c'est à dire par

$$\sum_{k=-r}^r \beta_k \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i e_i(n+k) \right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \left(\sum_{k=-r}^r \beta_k e_i(n+k) \right) = 2\alpha_n .$$

Ce que nous pouvons écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 \\ \vdots \\ 2\alpha_{r-1} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}$$

où la matrice \mathbf{B} est définie par

$$\mathbf{B}_{n,i} = \sum_{k=-r}^r \beta_k e_i(n+k) .$$

Nous détaillons trois cas simples de fractions rationnelles qui nous serviront de fonctions tests pour diverses applications dans ce chapitre et les suivants.

Premier cas : $\sigma(x) = \frac{1}{b-x}$.

Nous avons

$$\mathbf{B} = (c^{-1} - c) \quad \text{et} \quad \mathbf{A} = (4)$$

La série de Chebyshev de σ est

$$\frac{1}{b-x} = \frac{4}{c^{-1} - c} \sum_{n=0}^{\infty} {}' c^n T_n(x) . \quad (3.45)$$

Deuxième cas : $\sigma(x) = \frac{1}{(b-x)^2}$.

Le système à résoudre est déterminé par les éléments

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -\frac{c^2 - c^{-2}}{2} & -2 \\ \frac{c - c^{-1}}{2} & \frac{c + c^{-1}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -2 \\ \frac{1}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^{-1} - c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La série de Chebyshev de σ est

$$\frac{1}{(b-x)^2} = \frac{8c^2}{(c^2 - 1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} {}' [-(c^2 + 1)c^n + n(c^2 - 1)c^n] T_n(x) . \quad (3.46)$$

Troisième cas : $\sigma(x) = \frac{1}{(b_1-x)(b_2-x)}$.

Le système à résoudre est déterminé par les éléments

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} -\frac{(c_1-c_1^{-1})(c_2+c_2^{-1})}{2} & -\frac{(c_2-c_2^{-1})(c_1+c_1^{-1})}{2} \\ \frac{c_1-c_1^{-1}}{2} & \frac{c_2+c_2^{-1}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{-1}-c_1 & 0 \\ 0 & c_2^{-1}-c_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La série de Chebyshev de σ est

$$\frac{1}{(b_1-x)(b_2-x)} = \frac{8c_1c_2}{(c_1c_2-1)(c_1-c_2)} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left[\frac{c_1}{c_1^2-1} c_1^n - \frac{c_2}{c_2^2-1} c_2^n \right] T_n(x). \quad (3.47)$$

Application au produit de séries de Chebyshev

Le produit de séries s'obtient en quelque sorte par un passage à la limite du produit polynôme-série qui nous fournit la

Proposition 28

Soit $a = \{a_n\}$ et $b = \{b_n\}$ deux suites à décroissance géométrique, de vitesse respective ρ_a et ρ_b . Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}' a_n T_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} {}' b_n T_n = \sum_{n=0}^{\infty} {}' (a * b)_n T_n$$

où la suite $\{(a * b)_n\}$ est définie par le produit de convolution

$$(a * b)_n = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

avec la convention habituelle $a_{-k} = a_k$ et $b_{-k} = b_k$. De plus $\{(a * b)_n\}$ est à décroissance géométrique de vitesse $\min(\rho_a, \rho_b)$.

Remarque 13 Le produit de convolution défini dans la proposition 28 utilise la convention sur les indices négatifs. Celle-ci permet une écriture très simple voire élégante de cette opération. Cependant pour les calculs effectifs (et la programmation) nous donnons une formule n'utilisant que des indices positifs.

$$\begin{aligned} 2(a * b)_n &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r b_{n-r} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{-1} a_r b_{n-r} + \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} + \sum_{r=n+1}^{\infty} a_r b_{n-r} \end{aligned}$$

3.4 Autres propriétés

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=1}^{\infty} a_r b_{n+r} + \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} + \sum_{r=1}^{\infty} a_{n+r} b_r \\
&= \sum_{r=0}^n a_r b_{n-r} + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r b_{n+r} + a_{n+r} b_r) .
\end{aligned}$$

La proposition 28 est le pendant, pour les séries de Chebyshev, du produit de Cauchy pour les séries de Taylor. Mais une différence fondamentale sépare les deux notions : le produit de 2 séries de Chebyshev n'est pas une opération formelle ! En effet, il est nécessaire d'avoir des conditions sur les suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ pour assurer la convergence de la série qui définit $(a * b)_n$ et par là assurer l'existence de la série produit. Cette restriction n'existe pas pour les séries de Taylor pour lesquelles le produit de Cauchy (qui correspond à des sommes finies) existe toujours en tant qu'opération formelle même pour des séries divergentes.

Exemple 6 Utilisons le produit de séries pour retrouver la série de Chebyshev de l'inverse d'un polynôme du second degré à racines distinctes. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(b_1 - x)(b_2 - x)} &= \frac{1}{b_1 - x} \times \frac{1}{b_2 - x} \\
&= \frac{4}{c_1^{-1} - c_1} \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_1^n T_n(x) \times \frac{4}{c_2^{-1} - c_2} \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_2^n T_n(x) \\
&= \frac{8c_1 c_2}{(1 - c_1^2)(1 - c_2^2)} \sum_{n=0}^{\infty} {}'2(\mathbf{c}_1 * \mathbf{c}_2)_n T_n(x)
\end{aligned}$$

où $\mathbf{c}_1 = \{c_1^n\}$ et $\mathbf{c}_2 = \{c_2^n\}$ avec $c_1 = w^-(b_1)$ et $c_2 = w^-(b_2)$. Alors

$$\begin{aligned}
2(\mathbf{c}_1 * \mathbf{c}_2)_n &= \sum_{r=0}^n c_2^r \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^r + \sum_{r=1}^{\infty} (c_1^n (c_1 c_2)^r + c_2^n (c_1 c_2)^r) \\
&= c_2^n \frac{1 - \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{c_1}{c_2}} + (c_1^n + c_2^n) \frac{c_1 c_2}{1 - c_1 c_2} \\
&= \left(\frac{c_1}{c_1 - c_2} + \frac{c_1 c_2}{1 - c_1 c_2} \right) c_1^n + \left(\frac{c_2}{c_2 - c_1} + \frac{c_1 c_2}{1 - c_1 c_2} \right) c_2^n \\
&= \left(\frac{c_1(1 - c_2^2)}{(c_1 - c_2)(1 - c_1 c_2)} \right) c_1^n + \left(\frac{c_2(1 - c_1^2)}{(c_2 - c_1)(1 - c_1 c_2)} \right) c_2^n
\end{aligned}$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{(b_1 - x)(b_2 - x)} = \frac{8c_1 c_2}{(c_1 - c_2)(1 - c_1 c_2)} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\frac{c_1}{1 - c_1^2} c_1^n - \frac{c_2}{1 - c_2^2} c_2^n \right) T_n(x)$$

ce qui correspond à la formule (3.47). Pour $b_1 = b_2$, nous posons $c_1 = c_2 = c$ et $\mathbf{c} = \{c^n\}$. Alors

$$(\mathbf{c} * \mathbf{c})_n = (n + 1)c^n + 2c^n \frac{c^2}{1 - c^2} = \left(n + \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right) c^n .$$

Exemple 7 Multiplions 2 fonctions exponentielles :

$$\begin{aligned} e^{ax}e^{bx} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} {}'I_n(a)T_n(x) \times 2 \sum_{n=0}^{\infty} {}'I_n(b)T_n(x) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} {}'2(I(a) * I(b))_n T_n(x) . \end{aligned}$$

Or, en utilisant un théorème d'addition pour les fonctions de Bessel [1, 9.1.75], il vient

$$2(I(a) * I(b))_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_{n-k}(a)I_k(b) = I_n(a+b) .$$

La formule dans l'Abrahamowitz est donnée pour les fonctions de Bessel J_n , mais celle utilisée s'en déduit du fait que $I_n(ia) = (-i)^n J_n(-a) = i^n J_n(a)$ [1, 9.6.3]. Ainsi nous établissons

$$e^{ax}e^{bx} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} {}'I_n(a+b)T_n(x) = e^{(a+b)x}$$

ce qui est plutôt rassurant.

3.4.2 Intégration des séries de Chebyshev

De la formule de changement de base (3.30) de la proposition 18 nous tirons une formule d'intégration que nous présentons dans la

Proposition 29

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si la suite } \{c_n\} \text{ est à décroissance géométrique alors} \\ \\ \int \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n(x) = K + \sum_{n=0}^{\infty} {}'\Delta(c_n) T_n(x) \\ \\ \text{où } K \text{ est une constante.} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

Ce résultat dont nous donnerons une autre application dans le chapitre suivant, nous fournit un outil pour établir les séries de Chebyshev de fonctions élémentaires primitives de fonctions au développement de Chebyshev connu. En particulier, nous pouvons intégrer les fractions rationnelles pour obtenir des développements de logarithmes. Ainsi on pourra vérifier que

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} {}'a^n T_n = K + \frac{a - a^{-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} T_n$$

ce qui nous permet d'établir que, pour $b > 1$ et $c = w^-(b)$,

$$\log(b-x) = K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n} T_n , \quad (3.49)$$

la constante K étant déterminée par une valeur particulière du logarithme.

3.4.3 Dérivation dans la base de Chebyshev

Pour dériver les séries de Chebyshev nous avons pris le parti de changer de type de séries. Nous pouvons néanmoins exprimer la dérivée d'une série de Chebyshev sous forme d'une autre série de Chebyshev, moyennant certaines conditions de convergence. Comme le produit de séries, cette opération n'est alors pas une opération formelle sur les séries. Le résultat donné dans la proposition qui suit peut être trouvée dans [9, p. 68].

Proposition 30

Si la suite $\{c_n\}$ est à décroissance géométrique alors

$$\left\| \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\sum_{\substack{k=n+1 \\ k+n \text{ impair}}}^{\infty} 2k c_k \right) T_n(x) . \right.$$

Exemple 8 Vérifions la formule (3.43) grâce à la proposition 30. Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b-x)^2} &= \frac{d}{dx} \frac{1}{b-x} \\ &= \frac{4}{c^{-1} - c} \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} {}'c^n T_n(x) \\ &= \frac{4}{c^{-1} - c} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\sum_{\substack{k=n+1 \\ k+n \text{ impair}}}^{\infty} 2k c^k \right) T_n(x) . \end{aligned}$$

Et nous calculons le terme général de la série de Chebyshev qui précède

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k=n+1 \\ k+n \text{ impair}}}^{\infty} k c^k &= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+n+1) c^{2k+n+1} \\ &= c^{n+1} \left(2 \sum_{k=0}^{\infty} k c^{2k} + (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} c^{2k} \right) \\ &= c^{n+1} \left(\frac{2c^2}{(1-c^2)^2} + \frac{n+1}{1-c^2} \right) \\ &= \frac{c}{(1-c^2)^2} \left(-(c^2+1) + n(c^2-1) \right) c^n \end{aligned}$$

ce qui est conforme à la formule (3.43).

Insistons sur le caractère non formel de la dérivation dans la base de Chebyshev, puisque c'est lui qui nous a incité à chercher une autre voie en utilisant les bases de polynômes de Chebyshev dérivés et qui nous a donc conduit au schéma général.

3.4.4 Composition de polynômes de Chebyshev

La dernière propriété des polynômes de Chebyshev que nous allons présenter provient de leur "nature trigonométrique" et non de leur "nature hypergéométrique".

Proposition 31

|| Pour tout n et m entiers et pour tout x complexe, nous avons

$$T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x) .$$

Démonstration :

Pour $x \in [-1, 1]$,

$$T_n(T_m(x)) = \cos(n \arccos(\cos(m \arccos(x)))) = \cos(nm \arccos(x)) = T_{nm}(x)$$

Les polynômes $T_n(T_m(x))$ et $T_{nm}(x)$ coïncident pour une infinité de valeurs, ils sont égaux sur \mathbb{C} . Les rôles de n et m sont symétriques puisqu'il commutent dans l'indice de T_{nm} ce qui établit l'égalité $T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x)$. \square

Exemple 9 La formule (3.45) combinée à la propriété de composition nous permet d'écrire d'une part

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 - x^2} &= \frac{1}{b^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(2x^2 - 1)} \\ &= \frac{2}{T_2(b) - T_2(x)} \\ &= \frac{8\tilde{c}}{1 - \tilde{c}^2} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \tilde{c}^n T_n(T_2(x)) \quad \tilde{c} = w^-(T_2(b)) \\ &= \frac{8\tilde{c}}{1 - \tilde{c}^2} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \tilde{c}^n T_{2n}(x) . \end{aligned}$$

Mais d'autre part, en remarquant que si $w(c) = b$ alors $w(-c) = -b$, l'utilisation de la formule (3.47) avec $c_1 = c$ et $c_2 = -c$ nous donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{b^2 - x^2} &= \frac{-1}{(b - x)(-b - x)} \\ &= -\frac{-8c^2}{(-c^2 - 1)2c} \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left[\frac{c}{c^2 - 1} c^n - \frac{-c}{c^2 - 1} (-c)^n \right] T_n(x) \\ &= \frac{4c^2}{1 - c^4} \sum_{n=0}^{\infty} {}' (c^n + (-c)^n) T_n(x) \\ &= \frac{8c^2}{1 - c^4} \sum_{n=0}^{\infty} {}' (c^2)^n T_{2n}(x) . \end{aligned}$$

Les deux développements en série de Chebyshev de $\frac{1}{b^2 - x^2}$ sont identiques sous réserve que nous montrions l'égalité $\tilde{c} = c^2$. Or

$$\begin{aligned} w(c^2) &= T_2(w(c)) \quad (\text{proposition 3.15}) \\ &= T_2(b) \end{aligned}$$

mais comme c est de module strictement inférieur à 1, c^2 l'est aussi donc $c^2 = w^-(T_2(b))$ ce qui implique l'égalité cherchée.

3.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'appliquer aux séries de Chebyshev les résultats vus pour les séries orthogonales formelles mais en les validant du point de vue analytique. L'existence de la récurrence de Chebyshev étant fondée, nous allons pouvoir l'étudier.

Chapitre 4

Etude de la récurrence de Chebyshev

Dans le chapitre précédent nous avons vu comment établir une équation aux différences vérifiées par les coefficients de Chebyshev d'une fonction solution d'une équation différentielle holonome. Le prolongement logique de cette construction est la recherche des solutions de cette équation. Cela sera le but du chapitre suivant. Entre les deux, nous allons étudier la récurrence de Chebyshev pour elle-même, c'est-à-dire étudier sa structure et diverses manipulations qu'on peut effectuer sur elle. Cette étude aura d'ailleurs des implications dans la recherche et l'étude des solutions.

Dans ce chapitre, L désigne toujours l'opérateur différentiel holonome générique

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} \quad (4.1)$$

auquel nous associons d'une part une équation holonome générique $Ly = q$ et d'autre part, suivant les résultats de la proposition 19, l'opérateur aux différences

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^r p_k(X_r) \Delta^{r-k} . \quad (4.2)$$

L'opérateur \mathcal{L} est construit à l'aide d'opérateurs élémentaires dont nous rappelons la forme

$$\Delta = \frac{E^{-1} - E}{2n} , \quad (4.3)$$

$$X_0 = \frac{E^{-1} + E}{2} , \quad (4.4)$$

$$X_k = \frac{(n+k)E + (n-k)E^{-1}}{2n} . \quad (4.5)$$

Dans les égalités précédentes ainsi que dans le reste de ce chapitre et du mémoire, l'opérateur de décalage E agit sauf indication contraire sur la variable n .

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

4.1.1 Remarques préliminaires sur la récurrence de Chebyshev

Nous allons faire quelques remarques très élémentaires et commencer par énoncer un truisme : l'opérateur \mathcal{L} est un élément de l'algèbre d'opérateurs aux différences engendrée par les opérateurs Δ et X_k ($k = 0 \dots r$). Puisque nous avons la relation suivante (sur laquelle nous reviendrons plus bas)

$$X_k = X_0 - k\Delta \quad (4.6)$$

nous pouvons affirmer que l'opérateur \mathcal{L} est un élément de l'algèbre d'opérateurs aux différences engendrée par Δ et X_0 . Appelons \mathcal{A} cette algèbre. Nous condensons un certain nombre de propriétés élémentaires de l'algèbre \mathcal{A} dans la

Proposition 32

Tout élément de \mathcal{A} s'écrit sous la forme

$$\sum_{k=-k_0}^{k_0} a_k(n) E^k \quad (4.7)$$

où

1. k_0 est un entier naturel,
2. $a_k(n)$ est une fraction rationnelle (supposée réduite) dont le dénominateur a toutes ses racines entières,
3. pour tout k , nous avons $a_k(-n) = a_{-k}(n)$.

Démonstration :

La démonstration se fait par induction sur la construction des opérateurs. Pour éviter les redites, nous dirons qu'un opérateur aux différences qui s'écrit comme (4.7) et qui vérifie les propriétés 1, 2 et 3, vérifie la propriété \mathcal{P} . Visiblement la propriété \mathcal{P} est vérifiée par l'opérateur I d'identité ainsi que les opérateurs Δ et X_0 . Il est aussi très facile de constater que la combinaison linéaire de deux opérateurs vérifiant la propriété \mathcal{P} est un opérateur qui vérifie la propriété \mathcal{P} . Il nous suffit alors de montrer que pour tout opérateur A de la forme (4.7) vérifiant la propriété \mathcal{P} les opérateurs $X_0 A$ et ΔA la vérifient aussi. Pour cela nous écrivons

$$\begin{aligned} X_0 A &= \frac{E^{-1} + E}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(n) E^k \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k(n-1)}{2} E^{k-1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k(n+1)}{2} E^{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{a_{k+1}(n-1) + a_{k-1}(n+1)}{2} \right)}_{a'_k(n)} E^k \\ &= \sum_{k=-(k_0+1)}^{k_0+1} a'_k(n) E^k. \end{aligned}$$

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

Ainsi $X_0 A$ vérifie visiblement la propriété 1 ainsi que la propriété 2 puisque, par construction, le dénominateur de $a'_k(n)$ n'a que des racines entières. Et il reste à vérifier que

$$\begin{aligned} a'_k(-n) &= \frac{a_{k+1}(-n-1) + a_{k-1}(-n+1)}{2} \\ &= \frac{a_{-k-1}(n+1) + a_{-k+1}(n-1)}{2} \\ &= a'_{-k}(n). \end{aligned}$$

pour montrer la conservation de la propriété \mathcal{P} .

De la même manière, les calculs

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{E^{-1} - E}{2n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(n) E^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k(n-1)}{2n} E^{k-1} - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k(n+1)}{2n} E \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{a_{k+1}(n-1)}{2n} - \frac{a_{k-1}(n+1)}{2n} \right)}_{a''_k(n)} E^k \\ &= \sum_{k=(k_0+1)}^{k_0+1} a''_k(n) E^k \end{aligned}$$

et est conservée

$$\begin{aligned} a''_k(-n) &= \frac{a_{k+1}(-n-1)}{-2n} - \frac{a_{k-1}(-n+1)}{-2n} \\ &= -\frac{a_{-k+1}(n+1)}{2n} + \frac{a_{-k+1}(n-1)}{2n} \\ &= a''_{-k}(n). \end{aligned}$$

nous montre que la propriété \mathcal{P} est conservée.

Ainsi par construction, tout élément de \mathcal{A} vérifiera-t-il la propriété \mathcal{P} . \square

Cette proposition précise donc un peu la structure de l'opérateur \mathcal{L} pour lequel nous donnons de plus une borne pour l'entier k_0 apparaissant dans (4.7). En effet, d'après les propriétés des opérateurs aux différences vues au chapitre 1 et constatant que $d^+(\Delta) = d^+(X_r) = 1$ et $d^-(\Delta) = d^-(X_r) = -1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} d^+(\mathcal{L}) &\leq \max_{k=0}^r (d^+(p_k(X_r) \Delta^{r-k})) \\ &\leq r + \max_{k=0}^r (\deg(p_k) - k). \end{aligned} \tag{4.8}$$

De la même façon, nous obtenons

$$d^-(\mathcal{L}) \geq r + \max_{k=0}^r (\deg(p_k) - k). \tag{4.9}$$

Définition 11

A l'opérateur holonome L défini par (4.1) nous associons la quantité

$$\text{ext}(L) = r + \max_{k=0}^r (\deg(p_k) - k)$$

que nous appelons extension de l'opérateur L et de l'opérateur aux différences \mathcal{L} associé.

Alors si nous posons $e = \text{ext}(L)$, nous pouvons écrire

$$\mathcal{L} = \sum_{k=-e}^e l_k(n) E^k. \quad (4.10)$$

Il nous faudra quelques propriétés supplémentaires pour montrer que e et $-e$ sont exactement et respectivement le degré et la valuation de l'opérateur \mathcal{L} i.e. que l_e et l_{-e} ne sont pas identiquement nuls ; l'un impliquant d'ailleurs l'autre. Nous établirons cela plus bas.

4.1.2 Propriétés des opérateurs élémentaires

La formule (4.6) relie tous les opérateurs X_k à l'opérateur X_0 . La proposition suivante établit un ensemble de relations entre les opérateurs X_k et Δ

Proposition 33

Pour tous k , k_1 et k_2 entiers, nous avons les formules suivantes

$$X_{k_1} = X_{k_2} - (k_1 - k_2)\Delta, \quad (4.11)$$

$$X_1 = \frac{1}{n}X_0 n, \quad (4.12)$$

$$X_{k+1}\Delta = \Delta X_k. \quad (4.13)$$

Les deux dernières formules se généralisent pour tout polynôme p par

$$p(X_1) = \frac{1}{n}p(X_0)n, \quad (4.14)$$

$$p(X_{k+1})\Delta = \Delta p(X_k). \quad (4.15)$$

Démonstration :

La première formule est immédiate. Pour la seconde, il suffit de remarquer que

$$[E + E^{-1}] n = (n+1)E + (n-1)E^{-1}.$$

Alors en divisant par $2n$ chaque membre de cette égalité, nous obtenons la formule (4.12). Par ailleurs, nous avons

$$X_1^k = \underbrace{(\frac{1}{n}X_0 n)(\frac{1}{n}X_0 n) \dots (\frac{1}{n}X_0 n)}_{k \text{ fois}} = \frac{1}{n}X_0^k n$$

et donc par linéarité nous obtenons la formule (4.14). En utilisant la formule (4.12) et la définition de Δ nous établissons que

$$X_1\Delta = \frac{1}{n}X_0 n \frac{E^{-1} - E}{2n} = \frac{1}{n} \frac{E^{-1} + E}{2} \frac{E^{-1} - E}{2}.$$

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

Nous pouvons permuter les deux opérateurs à coefficients constants et obtenir

$$X_1 \Delta = \frac{1}{n} \frac{E^{-1} - E}{2} \frac{E^{-1} + E}{2} = \Delta X_0$$

ce qui montre la formule (4.13) pour $k = 1$. La généralisation est immédiate grâce à la formule (4.11)

$$\begin{aligned} X_{k+1} \Delta &= (X_1 - k\Delta)\Delta = \Delta X_0 - k\Delta^2 \\ &= \Delta(X_0 - k\Delta) = \Delta X_k. \end{aligned}$$

La démonstration de (4.15) est identique à celle donnée plus haut pour (4.14). \square

Les relations établies précédemment pour les opérateurs élémentaires l'ont été sans considération du lien entre ces opérateurs et les opérations sur des séries de Chebyshev. Nous allons donc interpréter les résultats de la proposition 33 en termes d'opérations sur les séries. Ainsi en utilisant l'égalité $x \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx}x - 1$ et en appliquant chacun de ses membres sur la même série, nous obtenons d'une part

$$x \frac{d}{dx} \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} = x \sum_{n=k+1}^{\infty} c_n T_n^{(k+1)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} X_{k+1}(c_n) T_n^{(k+1)}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dx}x - 1 \right] \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} &= \frac{d}{dx} \sum_{n=k}^{\infty} X_k(c_n) T_n^{(k)} - \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} X_k(c_n) T_n^{(k+1)} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta(c_n) T_n^{(k+1)} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} [X_k - \Delta](c_n) T_n^{(k+1)} \end{aligned}$$

ce qui montre la formule (4.11) pour $k_2 = k + 1$ et $k_1 = k$. La formule (4.12) se retrouve en considérant la multiplication par x d'une série de Chebyshev suivie ou précédée d'un changement de base. D'une première manière nous calculons

$$x \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} X_k(c_n) T_n^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta X_k(c_n) T_n^{(k+1)}$$

et alternativement

$$x \sum_{n=k}^{\infty} c_n T_n^{(k)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \Delta(c_n) T_n^{(k+1)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} X_{k+1}\Delta(c_n) T_n^{(k+1)}.$$

Une première application des formules données par la proposition 33 est l'explicitation de la récurrence de Chebyshev dans le cas d'un opérateur différentiel d'ordre 1.

Proposition 34

Supposons que l'opérateur L soit d'ordre 1. Nous posons $e = \text{ext}(L)$. Les polynômes p_1 et p_0 qui définissent L s'écrivent dans la base de Chebyshev

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^e {}' \alpha_k T_k(x) \quad \text{et} \quad p_0(x) = \sum_{k=0}^{e-1} {}' \beta_k T_k(x)$$

avec les conventions habituelles pour les indices négatifs. Alors l'opérateur \mathcal{L} associé à L s'écrit explicitement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2n} \sum_{k=-e}^e \left(n\alpha_k + \frac{\beta_{k+1} - \beta_{k-1}}{2} + k\alpha_k \right) E^k. \quad (4.16)$$

Démonstration :

Suivant notre schéma général, nous avons

$$\mathcal{L} = p_1(X_1) + p_0(X_1)\Delta.$$

D'après les résultats (4.14) et (4.15) de la proposition (33) nous transformons l'opérateur comme suit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{n} p_1(X_0)n + \Delta p_0(X_0).$$

Cette forme est intéressante car nous savons expliciter les polynômes en X_0 comme nous l'avons fait pour les fractions rationnelles. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-e}^e \alpha_k E^k \right) n + \frac{E^{-1} - E}{2n} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=-e+1}^{e-1} \beta_k E^k \right) \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=-e}^e \left((n+k)\alpha_k E^k + \left(\frac{\beta_{k+1} - \beta_{k-1}}{2} \right) E^k \right). \end{aligned}$$

Un regroupement des termes nous donne le résultat énoncé. □

4.1.3 Un regard nouveau sur d'autres méthodes

Diverses méthodes existent pour générer les récurrences vérifiées par les coefficients de Chebyshev solutions de l'équation différentielle holonome $Ly = q$. Nous allons les présenter et les comparer à notre schéma général à la lumière du formalisme que nous avons introduit.

La méthode de Clenshaw

La méthode de Clenshaw [12] repose sur l'idée d'associer à chaque dérivée de y une série de Chebyshev, soit

$$y^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n^{(k)} T_n(x)$$

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

pour k allant de 0 à r . De cette façon, on n'introduit pas d'autre type de séries que les séries en T_n . La méthode pour multiplier les séries de Chebyshev pour un polynôme est la même que celle que nous avons présentée, c'est-à-dire que nous avons

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n^{(0)} T_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \left(\sum_{k=0}^r p_k(X_0) c_n^{(k)} \right) T_n(x) . \quad (4.17)$$

Par ailleurs, les différentes suites sont liées par les relations

$$c_n^{(k)} = \frac{c_{n-1}^{(k+1)} - c_{n+1}^{(k+1)}}{2n} , \quad k = 1 \dots \infty . \quad (4.18)$$

Clenshaw obtient alors un système que nous pouvons écrire avec nos notations

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^r p_k(X_0) c_n^{(k)} = q_n , \\ c_n^{(k)} = \Delta c_n^{(k+1)} , \quad k = 0..r-1 . \end{cases}$$

où q_n est le n -ième coefficient de Chebyshev de q . Elliot [21] a étendu cette méthode aux séries en polynômes de Gegenbauer et obtient pour celles-ci un système similaire. Faisons ce que Clenshaw à éviter de faire : introduisons des séries en dérivées de polynômes de Chebyshev. Il vient à l'aide de l'opérateur de changement de base

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n T_n(x) \right) = \sum_{n=q}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r \Delta^r p_k(X_0) c_n^{(k)} \right) T_n^{(r)}(x) .$$

Or la formule (4.13) de la proposition 33 entraîne que $\Delta^r p_k(X_0) = p_k(X_r) \Delta^r$ et grâce aux relations (4.18) nous avons $\Delta^r c_n^{(k)} = \Delta^{r-k} c_n^{(0)}$. En reportant dans l'égalité ci-dessus ces deux transformations nous obtenons l'égalité suivante

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n T_n(x) \right) = \sum_{n=r}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^r p_k(X_r) \Delta^{r-k} c_n \right) T_n^{(r)}(x)$$

dans laquelle nous reconnaissions l'opérateur associé à récurrence de Chebyshev telle que nous l'avons définie. L'avantage de notre approche est de n'introduire qu'une seule suite de coefficients. La méthode de Clenshaw, quoiqu' utilisée par celui-ci pour un calcul effectif de séries de Chebyshev et établir des tables de valeurs, reste néanmoins délicate à manier dans le cas général. Des remarques à ce sujet se trouvent dans un papier d'Olaefe [48] et les livres de Fox [25] et Wimp [62].

Variante du schéma général

Nous savons d'après le lemme 1 que l'opérateur différentiel L peut s'écrire sous la forme

$$L = \sum_{k=0}^r \frac{d^k}{dx^k} \bar{p}_k(x) .$$

Si nous appliquons sous cette forme l'opérateur à une série de Chebyshev, nous obtenons, en vertu des opérations élémentaires définies dans la proposition 18,

$$\begin{aligned}
 L\left(\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n\right) &= \sum_{k=0}^r \frac{d^k}{dx^k} \left(\bar{p}_k(x) \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n\right) \\
 &= \sum_{k=0}^r \frac{d^k}{dx^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}'\bar{p}_k(X_0)(c_n) T_n\right) \\
 &= \sum_{k=0}^r \left(\sum_{n=k}^{\infty} {}'\bar{p}_k(X_0)(c_n) T_n^{(k)}\right) \\
 &= \sum_{n=r}^{\infty} \bar{\mathcal{L}}(c_n) T_n^{(r)}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

où nous avons posé

$$\bar{\mathcal{L}} = \sum_{k=0}^r \Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0). \tag{4.20}$$

Avec les mêmes arguments que pour le schéma général, on montre que la formule (4.19) est analytiquement correcte si c_n est à décroissance géométrique. Grâce à cette convergence pour toute suite de coefficients à décroissance géométrique et à l'orthogonalité des polynômes $T_n^{(r)}$, nous pourrions montrer l'égalité formelle des opérateurs \mathcal{L} et $\bar{\mathcal{L}}$, qui sont à coefficients fractions rationnelles, par des arguments d'interpolation. Néanmoins nous préférerons une démonstration plus directe - et que nous pensons plus élégante - fondée sur les propriétés des opérateurs élémentaires. Pour cela, donnons le lemme suivant

Lemme 5

Soit $X = X_k$ pour k entier quelconque. Alors, pour tout polynôme p , nous avons

$$\parallel p(X) = p(X + \Delta) - \Delta p'(X + \Delta) = p(X + \Delta) - p'(X)\Delta. \tag{4.21}$$

Démonstration :

Montrons par récurrence ce résultat pour $p(x) = x^n$. Pour $p(x) = x^0 = 1$, le résultat est trivialement vrai. Supposons le résultat vrai pour au rang n , alors

$$\begin{aligned}
 X^{n+1} &= XX^n \\
 &= X((X + \Delta)^n - nX^{n-1}\Delta) \\
 &= (X + \Delta)(X + \Delta)^n - \Delta(X + \Delta)^n - nX^n\Delta \\
 &= (X + \Delta)^{n+1} - X^n\Delta - nX^n\Delta \\
 &= (X + \Delta)^{n+1} - (n + 1)X^n\Delta.
 \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $n + 1$. Et par linéarité, elle est vraie pour tout polynôme p . \square

Le lemme 5 est valable pour $X = X_k$ quelconque, donc la formule (4.21) reste valide si l'on substitue $X + \Delta$ à X . De ce fait nous pouvons réitérer le procédé et obtenir

$$\begin{aligned}
 p(X) &= p(X + \Delta) - \Delta p'(X + \Delta) \\
 &= p(X + 2\Delta) - \Delta p'(X + 2\Delta) - \Delta(p'(X + 2\Delta) - \Delta p''(X + 2\Delta)) \\
 &= p(X + 2\Delta) - 2p'(X + 2\Delta) + \Delta^2 p''(X + 2\Delta)
 \end{aligned}$$

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

et plus généralement nous avons la formule¹

$$p(X) = \sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \Delta^{(k-l)} p^{(k-l)}(X + k\Delta). \quad (4.22)$$

Pour l'utilisation que nous allons en faire nous prenons $X = X_r$ et de ce fait, d'après la formule (4.11), $X + k\Delta = X_{r-k}$. Alors nous écrivons

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{k=0}^r p_k(X_r) \Delta^{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^r \left[\sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \Delta^{k-l} p_k^{(k-l)}(X_{r-k}) \right] \Delta^{r-k} \\ &= \sum_{k=0}^r \left[\sum_{l=0}^k (-1)^l C_k^l \Delta^{k-l} \Delta^{r-k} p_k^{(k-l)}(X_0) \right] \\ &= \sum_{l=0}^r \left[\sum_{k=l}^r (-1)^l C_k^l \Delta^{k-l} \Delta^{r-k} p_k^{(k-l)}(X_0) \right] \\ &= \sum_{l=0}^r \Delta^{r-l} \left[\sum_{k=l}^r (-1)^l C_k^l p_k^{(k-l)}(X_0) \right] \\ &= \sum_{l=0}^r \Delta^{r-l} \bar{p}_l(X_0) \\ &= \bar{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

Ce qui établit le résultat annoncé. La démonstration ne dépend que de propriétés liant les différents opérateurs et non de la nature de leurs coefficients comme dans l'autre démonstration que nous avons évoquée. Or nous pensons que cette démonstration s'applique dans le cas d'autres séries, non nécessairement de polynômes, pour lesquelles les coefficients des opérateurs élémentaires seraient moins simples que des fractions rationnelles. Ceci explique, en plus de l'appréciation esthétique personnelle, le choix de cette démonstration plutôt qu'une autre.

Petite digression

La propriété énoncée dans le lemme 5 entraîne la suivante

$$[p(X), \Delta] = p'(X)[X, \Delta] \quad (4.23)$$

où le crochet est le crochet de Lie défini par $[A, B] = AB - BA$. En effet multiplions à droite par Δ l'égalité (4.21), nous obtenons

$$p(X)\Delta = p(X + \Delta)\Delta - p'(X)\Delta^2$$

¹Cette formule se réécrit de manière condensée mais un peu abusive sous la forme

$$p(X) = \left(1 - \Delta \frac{d}{dx}\right)^k p(X + k\Delta).$$

$$= \Delta p(X) + p'(X)[X, \Delta]$$

puisque $[X, \Delta] = -\Delta^2$. L'égalité (4.23) s'en suit. Ce résultat rappelle une propriété générale des algèbres de Lie que nous donnons dans le lemme suivant.

Lemme 6

Soient A et B deux éléments de \mathcal{A} vérifiant

$$[A, [A, B]] = 0 \quad (4.24)$$

alors pour tout polynôme p on a

$$[p(A), B] = p'(A) [A, B] . \quad (4.25)$$

Démonstration :

Là encore, il suffit de montrer le résultat pour $p(x) = x^n$. Le résultat pour $p(x)$ quelconque s'en déduira par linéarité. Pour p constant, $p(A)$ est proportionnel à l'unité donc le membre de gauche dans (4.25) est nul comme l'est évidemment le membre de droite. Maintenant supposons que la propriété soit vraie pour $p(x) = x^n$ et montrons qu'elle l'est alors pour $p(x) = x^{n+1}$.

$$\begin{aligned} [A^{n+1}, B] &= A^{n+1}B + (-ABA^n + ABA^n) - BA^{n+1} \\ &= A[A^n, B] + [A, B]A^n . \end{aligned}$$

Or, par l'hypothèse (4.24), $[A, B]$ commute avec A donc avec A^n , ce qui permet d'écrire en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$[A^{n+1}, B] = A(nA^{n-1}[A, B]) + A^n[A, B] = (n+1)A^n[A, B] .$$

Ce que nous voulions montrer. □

Et ce lemme s'applique à nos opérateurs puisque

$$[\Delta, X] = \Delta^2 \Rightarrow [\Delta, [\Delta, X]] = 0 .$$

Ainsi nous avons la propriété suivante pour tout polynôme p

$$[p(\Delta), X] = p'(\Delta)[\Delta, X] = p'(\Delta)\Delta^2 .$$

Nous n'avons pas trouvé d'application immédiate à cette propriété mais nous la consignons néanmoins ici avec l'espérance de l'utiliser.

Où l'on retrouve la méthode de Fox ...

Fox et Parker [25] ont proposé une autre méthode pour générer une récurrence vérifiée par les coefficients de Chebyshev d'une solution d'équation différentielle holonome. Mais afin d'éviter d'introduire des suites auxiliaires comme dans la méthode de Clenshaw, ils transforment l'équation différentielle en équation intégrale par intégrations par parties successives. Le nombre d'intégrations est égal à l'ordre de l'équation différentielle. L'intégration des séries de Chebyshev est effectuée grâce au résultat de la proposition

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

29 que nous avons donnée dans le chapitre précédent. Geddes [27] qui a implémenté la méthode de Fox donne une forme explicite de la transformation pour un ordre quelconque. Nous retrouvons cette formule et donc le résultat de Fox en intégrant la forme duale de l'opérateur L donnée dans le lemme 1. Nous avons ainsi

$$\int \cdot \cdot \int L y = \sum_{k=0}^r \int \cdot \cdot \int \bar{p}_k y + a_0 + a_1 x + \cdots + a_{r-1} x^{r-1} \quad (4.26)$$

où les a_k sont des constantes d'intégration. De cette manière, nous obtenons

$$\int \cdot \cdot \int L \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n \right) = \sum_{n=q}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^r \Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0) \right] (c_n) T_n + a_0 + \cdots + a_{r-1} x^{r-1}. \quad (4.27)$$

En intégration le second membre q de l'équation écrit dans la base de Chebyshev avec les coefficients q_n

$$\int \cdot \cdot \int q = \sum_{k=0}^r \Delta^r(q_n) T_n + b_0 + \cdots + b_{r-1} x^{r-1}$$

et en identifiant les coefficients dans les séries à partir du rang r nous obtenons la récurrence

$$\sum_{k=0}^r \left[\Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0) \right] (c_n) = \Delta^r(q_n), \quad n \geq r.$$

L'opérateur aux différences au premier membre est celui de la récurrence de Chebyshev comme nous l'avons démontré plus haut et il est facile de voir que les coefficients au second membre sont ceux de q développé dans la base $T_n^{(r)}$. Ainsi, la récurrence ci-dessus est la récurrence de Chebyshev telle que nous l'avons construite. Néanmoins, la méthode de Fox élude un problème de l'application d'un opérateur différentiel à une série de Chebyshev (ou autre), problème qui a bien d'autres applications que la construction de récurrences. De plus, le passage de l'équation différentielle à l'équation intégrale a un coût de calcul qui peut devenir important si l'équation initiale contient des quantités symboliques. Enfin, cette méthode ne prend pas en compte la relation de structure.

... et l'approche par produit scalaire

Appliquons aux coefficients de Chebyshev, la méthode de construction de récurrences basée sur le produit scalaire vue au chapitre 1. Les éléments déterminant les polynômes de Chebyshev, *i.e.* $\sigma(x) = x^2 - 1$ et $\tau(x) = x$, nous permettent d'établir que

$$\lambda_n = n^2.$$

Alors dans le cas Chebyshev l'opérateur \mathbf{S} défini en (1.39) vaut

$$\mathbf{S} = \frac{1}{n^2} \nabla = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n}{2} (\mathbf{E}^{-1} - \mathbf{E}) \right) = \frac{\mathbf{E}^{-1} - \mathbf{E}}{2n} = \Delta$$

et la récurrence engendrée suivant la formule (1.48) et vérifiée par les coefficients de Chebyshev $c_n(\sigma)$ d'une solution σ de $Ly = q$, est donc

$$\sum_{k=0}^r \Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0) c_n(\sigma) = \Delta^r c_n(q).$$

Comme nous l'avons dit plus haut, cette méthode est celle donnée par Paszkowski. Mais surtout, nous reconnaissions la récurrence telle qu'elle est construite par la variante du schéma générale ou la méthode de Fox.

Ainsi, les différentes méthodes que nous avons présentées aboutissent à la récurrence de Chebyshev. L'avantage de notre méthode pour générer la récurrence de Chebyshev est qu'elle ne nécessite pas de transformation préalable de l'équation et surtout qu'elle s'inscrit dans un cadre plus général tant au niveau des types de séries qu'elle manipule qu'au niveau des applications que nous pouvons en tirer.

4.1.4 Forme polynomiale de la récurrence de Chebyshev

Pour le moment, nous avons montré que l'opérateur \mathcal{L} associé à la récurrence de Chebyshev est un opérateur à coefficients rationnels présentant une certaine symétrie de coefficients. Un opérateur à coefficients rationnels peut toujours se ramener à un opérateur à coefficients polynomiaux par multiplication par un polynôme *ad hoc*. Dans le cas de l'opérateur \mathcal{L} , nous nous ramenons à un opérateur à coefficients polynomiaux par multiplication par un polynôme qui ne dépend que de l'ordre de l'opérateur différentiel L qui engendre \mathcal{L} . Pour établir ce fait, nous allons utiliser la forme duale de \mathcal{L} donnée par (4.20) que nous rappelons ici

$$\sum_{k=0}^r \Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0) . \quad (4.28)$$

L'intérêt de cette écriture est que, l'opérateur X_0 étant à coefficients constants, seul l'opérateur Δ introduit la variable n dans l'opérateur aux différences. Aussi est-ce la forme des puissances de Δ qui va déterminer la structure rationnelle des coefficients. La proposition qui suit va préciser les choses.

Proposition 35

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, nous avons

$$\Delta^k = \frac{\sum_{l=-k}^k S_{k,l}(n) E^l}{D_k(n)} \quad (4.29)$$

où

$$D_k(n) = 2^k n \prod_{u=1}^{k-1} (n^2 - u^2)$$

et où les $S_{k,l}(n)$ sont des polynômes, nuls si k et l sont de parités opposées ou si $k < |l|$, sinon définis par

$$S_{k,l}(n) = (-1)^j C_k^j (n+l) \prod_{u \in I_{k,j}} (n-u) \quad (4.30)$$

avec

$$j = \frac{k+l}{2} \quad \text{et} \quad I_{k,j} = \{-k+1, \dots, k-1\} \setminus \{-j, \dots, -j+k\} .$$

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

Démonstration :

Puisque $D_1(n) = 2n$, nous pouvons écrire

$$\Delta = \frac{E^{-1} - E}{D_1(n)}$$

et la proposition est vraie pour $k = 1$ avec $S_{1,-1}(n) = -S_{1,1}(n) \equiv 1$. Supposons la proposition vérifiée au rang k , alors

$$\begin{aligned} D_{k+1}(n)\Delta^{k+1} &= 2(n^2 - k^2) [D_k(n)\Delta^k] \Delta \\ &= 2(n^2 - k^2) \sum_{l=-k}^k S_{k,l}(n) \left(\frac{E^{l-1}}{2(n+l)} - \frac{E^{l+1}}{2(n+l)} \right) \\ &= \sum_{l=-k-1}^{k+1} (n^2 - k^2) \left(\frac{S_{k,l+1}(n)}{n+l+1} - \frac{S_{k,l-1}(n)}{n+l-1} \right) E^l \end{aligned}$$

Il s'agit de montrer que la quantité

$$A_{k+1,l}(n) = (n^2 - k^2) \left(\frac{S_{k,l+1}(n)}{n+l+1} - \frac{S_{k,l-1}(n)}{n+l-1} \right)$$

est égale à $S_{k+1,l}(n)$. Traitons d'abord les cas de nullité : si $k+1$ et l sont de parités opposées, il en est de même pour k et $l+1$ et pour k et $l-1$, donc $S_{k,l+1}(n)$ et $S_{k,l-1}(n)$ sont nuls ce qui entraîne la nullité de $S_{k+1,l}(n)$; si $k+1 < |l|$ alors $k < |l+1|$ et $k < |l-1|$ donc $S_{k,l+1}(n) = S_{k,l-1}(n) = 0$ et $S_{k+1,l}(n) = 0$.

Pour traiter le cas où (4.30) s'applique, nous écrivons le polynôme $S_{k,l}(n)$ sous la forme

$$S_{k,l}(n) = (-1)^j C_k^j \frac{\prod_{u=-k+1}^{k-1} (n-u)}{\prod_{u=-j}^{k-j} (n-u)}$$

ce qui clarifiera les calculs (à défaut de les simplifier). Posons $j = \frac{k+1+l}{2}$. Nous avons alors $\frac{k+(l-1)}{2} = j-1$ de sorte que

$$\begin{aligned} A_{k+1,l}(n) &= (n^2 - k^2) \left(\frac{(-1)^j C_k^j \prod_{u=-k+1}^{k-1} (n-u)}{\prod_{u=-j}^{k-j} (n-u)} - \frac{(-1)^{j-1} C_k^{j-1} \prod_{u=-k+1}^{k-1} (n-u)}{\prod_{u=-j+1}^{k-j+1} (n-u)} \right) \\ &= (-1)^j \prod_{u=-k}^k (n-u) \frac{C_k^j (n+j) + C_k^{j-1} (n+j-k-1)}{\prod_{u=-j}^{k+1-j} (n-u)} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
 C_k^j(n+j) + C_k^{j-1}(n+j-k-1) &= \left(C_k^j + C_k^{j-1} \right) (n+j) - (k+1) C_k^{j-1} \\
 &= C_{k+1}^j(n+j) - (k-j) C_{k+1}^j \\
 &= C_{k+1}^j \underbrace{(n+2j-k)}_{n+l}
 \end{aligned}$$

donc $A_{k+1,l}(n)$ est bien égal à $S_{k+1,l}(n)$ ce qui montre la propriété au rang $k+1$ et achève la démonstration. \square

La démonstration qui précède est d'une parfaite inélégance mais nous n'en avons pas trouvée de moins lourde malgré notre conviction qu'il en existe une.

Puisque Δ^r est la plus grande puissance de Δ apparaissant dans l'expression (4.28), le plus petit dénominateur commun des fractions rationnelles coefficients de l'opérateur \mathcal{L} est donc $D_r(n)$. Par conséquent, nous transformons l'opérateur \mathcal{L} en opérateur aux différences à coefficients polynomiaux par multiplication par $D_r(n)$. Posons donc

$$\mathfrak{L} = D_r(n)\mathcal{L}. \quad (4.31)$$

Soit k un entier positif et strictement inférieur à r . Alors en application la proposition précédente, nous établissons que l'opérateur

$$D_r(n)\Delta^{r-k}$$

a pour coefficients

$$2^{-k} \prod_{u=r-k}^{r-1} (n^2 - u^2) S_{r-k,l}(n). \quad (4.32)$$

Il est facile d'établir, d'après l'expression (4.30), que le degré du polynôme $S_{k,l}$ est $k-1$ et donc que celui des coefficients (4.32) est

$$2k + r - k - 1 = r + k - 1. \quad (4.33)$$

Le degré des coefficients de $D_r(n)\Delta^0$ est le degré de $D_r(n)$ et vaut donc $2r-1$, ce qui est supérieur aux valeurs (4.33) quelque soit k . Ainsi, nous pouvons déjà dire que l'opérateur \mathfrak{L} est de la forme

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(n) E^k$$

où les coefficients $\mathfrak{l}_k(n)$ sont des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2r-1$. Par ailleurs, nous avons $\mathfrak{l}_k(n) = D_r(n)l_k(n)$ où les fractions $l_k(n)$ sont définies en (4.10) et vérifient $l_k(-n) = l_{-k}(n)$. Puisque $D_r(n)$ est un polynôme impair, nous avons donc $\mathfrak{l}_k(-n) = -\mathfrak{l}_{-k}(n)$.

Il nous reste à vérifier que l'opérateur \mathfrak{L} est de degré exactement égal à $e = \text{ext}(L)$. Cela revient à démontrer que le coefficients $\mathfrak{l}_e(n)$ est non identiquement nul. Pour cela, explicitons le coefficient qui se trouve devant E^e dans \mathfrak{L} . Il n'est pas difficile de montrer que

4.1 Caractéristiques de la récurrence de Chebyshev

nous pouvons définir la quantité $\text{ext}(L)$ de la manière équivalente à la définition première, par

$$e = \text{ext}(L) = r + \max_{k=0}^r (\deg(\bar{p}_k) - k), .$$

Cette égalité peut se traduire par la série d'inégalités

$$\deg(\bar{p}_k) \leq e - r + k$$

avec au moins une égalité. Notons β_k le coefficient de T_{e-r+k} dans le développement de \bar{p}_k dans la base de Chebyshev. D'après les inégalités ci-dessus, β_k est soit le coefficient de tête de \bar{p}_k (dans la base de Chebyshev), soit nul ; et au moins l'un des β_k est non nul. Dans le cas où β_k est non nul, le coefficient dominant de l'opérateur $\bar{p}_k(X_0)$ est

$$\frac{\beta_k}{2} E^{e-r+k}$$

et donc celui de $D_r(n) \Delta^{r-k} \bar{p}_k(X_0)$ est

$$2^{k-r-1} \beta_k \prod_{u=k+1}^r (n^2 - u^2) S_{r-k, r-k}(n) E^{e-r+k} E^{r-k}$$

d'où nous tisons

$$\mathfrak{l}_e(n) = \sum_{k=0}^r 2^{k-r-1} \beta_k \prod_{u=k+1}^r (n^2 - u^2) S_{r-k, r-k}(n).$$

Comme le degré des polynômes facteurs des β_k sont tous distincts et qu'au moins un des β_k est non nul, le polynôme $\mathfrak{l}_e(n)$ est donc non identiquement nul. Et il en est de même pour $\mathfrak{l}_{-e}(n)$ d'après la propriété de symétrie.

Nous condensons alors les résultats précédents dans la

Proposition 36

L'opérateur \mathfrak{L} défini par (4.31) s'écrit

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(n) E^k$$

où

- $e = r + \max_{k=0}^r (\deg(p_k) - k)$,
- les \mathfrak{l}_k sont des polynômes de degré $2r - 1$,
- qui vérifient $\mathfrak{l}_k(-n) = -\mathfrak{l}_{-k}(n)$.

Ainsi nous avons montré que l'on peut, dans le cadre des séries de Chebyshev, associer un opérateur aux différences à coefficients polynomiaux à un opérateur différentiel holonome quelconque. Cela n'est pas sans rappeler le lien entre transformation de Mellin formelle et opérateur différentiel dans le cas de la manipulation des séries de Taylor. La section suivante va donner des éléments renforçant cette analogie.

4.2 Divers travaux autour de la récurrence de Chebyshev

Dans cette section nous allons utiliser de manière récurrente différents opérateurs différentiels que nous introduisons ici pour le reste de la section

$$\begin{aligned}\theta_x &= x \frac{d}{dx} \\ \Theta_x &= (x^2 - 1) \frac{d}{dx} \\ \Psi_{k,x} &= (x^2 - 1) \frac{d}{dx} + (2k + 1)x \\ \Phi_{k,x} &= (x^2 - 1) \frac{d^2}{dx^2} + (2k + 1)x \frac{d}{dx}\end{aligned}$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, la variable de dérivation sera omise. Dans la section, nous ferons usage à plusieurs reprises de la transformation suivante

$$2(Xu + Yv) = (X + Y)(u + v) + (X - Y)(u - v) \quad (4.34)$$

où X, Y, u et v sont des réels (ou des complexes) quelconques.

4.2.1 Factorisation des récurrences de Chebyshev

La méthode que nous avons présentée permet de générer une récurrence vérifiée par les coefficients de Chebyshev d'une solution d'équation holonome en toute généralité. Cette généralité se paie parfois par le fait que la récurrence obtenue n'est pas toujours minimale c'est-à-dire qu'il existe une récurrence d'ordre inférieur vérifiée par les coefficients de Chebyshev de toute solution. Lewanowicz a développé dans une série d'articles [37, 38, 39, 40] une méthode pour générer la récurrence minimale vérifiée par les coefficients de Jacobi des solutions d'une équation différentielle holonome. Nous allons montrer qu'avec notre formalisme nous pouvons retrouver les récurrences minimales. Avant de commencer, signalons que si le schéma général ne donne pas toujours une récurrence minimale, il la donne quand même *presque toujours* comme le montre la proposition suivante.

Proposition 37

|| *Si le coefficient p_r de l'opérateur L (4.1) ne s'annule pas en -1 ni en 1 alors la récurrence générée par le schéma général est minimale.*

Démonstration :

Lewanowicz a démontré [37] que la méthode de Pazkowski donne des récurrences minimales dans sous les hypothèses énoncées. Or nous avons montré plus haut l'équivalence entre la méthode de Pazkowski et le schéma général. \square

Ainsi, la non-minimalité apparaît dans un cas limite c'est-à-dire quand l'équation différentielle originelle présente des singularités aux extrémités de l'intervalle $[-1, 1]$. Cela n'empêche pas l'existence de solutions développables en séries de Chebyshev mais la proposition 22 ne s'applique plus. On trouvera des résultats sur le comportement asymptotique des coefficients de Chebyshev de fonctions présentant des singularités à ces extrémités dans un livre de J.P. Boyd [7]. Nous renvoyons le lecteur à cette référence car nous allons mettre l'accent sur l'étude de l'équation différentielle (et la récurrence associée) plutôt que sur ses solutions. Commençons avec un exemple.

Exemple 10 Considérons l'opérateur différentiel

$$L = x(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - (1+2x-2x^3) \frac{d}{dx} + (1+x)$$

et l'équation différentielle homogène associée $Ly = 0$. Cette équation présente des singularités (régulières) en 0, -1 et 1. Elle entre encore moins dans le cadre de la proposition 22. Cependant nous connaissons les solutions de cette équation dont une est

$$e^x \cos(\sqrt{1-x^2}) .$$

On peut vérifier que cette fonction est une fonction entière dont le développement en série de Chebyshev est

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}' \frac{1}{n!} T_n(x) ,$$

donc avec des coefficients plus que géométriquement décroissants. Ces coefficients vérifient donc la récurrence construite par le schéma général à savoir

$$[X_2(I - X_2^2) - (I + 2X_2 - 2X_2^3)\Delta + (I + X_2)\Delta^2] (c_n) = 0$$

qui est d'ordre 8. La méthode de Lewanowicz construit la récurrence

$$(n-2)c_{n-2} - (1-3n+n^2)c_{n-1} + 2c_n - (1+3n+n^2)c_{n+1} - (n+2)c_{n+2} = 0$$

qui est d'ordre 4.

Nous n'allons pas produire une analyse aussi fine que celle de Lewanowicz et nous nous restreignons au cas où p_r est divisible par $1-x^2$. Le gain d'ordre que nous pouvons obtenir par rapport au schéma général provient alors de l'utilisation de la relation de structure et de l'équation hypergéométrique pour les polynômes $T_n^{(k)}$.

Définition 12

Nous définissons les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} N_k &= (n^2 - k^2)I \\ \nabla_k &= \nabla - 2kX_0 + k(k+1)\Delta \end{aligned}$$

pour k entier positif.

Remarquons que ∇_0 est égal à l'opérateur ∇ défini à la proposition 25. La proposition suivante généralise la proposition 25 et introduit une nouvelle série d'opérations sur les séries de Chebyshev.

Proposition 38

Pour tout $k \geq 0$, nous avons les formules suivantes

$$\Phi_k \sum_{n=k}^{\infty} {}' c_n T_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} {}' N_k(c_n) T_n^{(k)}(x) , \quad (4.35)$$

$$\Theta \sum_{n=k}^{\infty} {}' c_n T_n^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} {}' \nabla_k(c_n) T_n^{(k)}(x) . \quad (4.36)$$

Démonstration :

On vérifiera à l'aide des résultats établis pour les polynômes hypergéométriques que le polynôme $T_n^{(k)}$ est solution de l'équation

$$(x^2 - 1)y'' + (2k + 1)xy' - (n^2 - k^2)y = 0$$

ce que nous pouvons écrire $\Phi_k T_n^{(k)} = (n^2 - k^2)T_n^{(k)}$. Appliquons l'opérateur Φ_k à une série en $T_n^{(k)}$ et la formule (4.35) est établie.

Pour chaque valeur de k l'existence d'un opérateur aux différences ∇_k tel que la formule (4.36) soit vraie est démontrée comme cas particulier de la relation de structure pour les séries orthogonales classiques (formule (1.29) de la proposition 12) puisque $\Theta = \sigma(x) \frac{d}{dx}$. Il reste à montrer que l'opérateur ∇_k est bien celui donné par la définition 12. Comme nous avons montré la formule (4.36) pour $k = 0$ dans la proposition 25, nous supposons $k > 0$. Nous écrivons alors

$$\Theta \frac{d}{dx} \sum_{n=k}^{\infty} {}'c_n T_n^{(k)}(x) = \left[\frac{d}{dx} \Theta - 2x \frac{d}{dx} \right] \sum_{n=k}^{\infty} {}'c_n T_n^{(k)}(x)$$

ce qui se traduit en termes d'opérateurs par

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} {}'\nabla_{k+1}(c_n) T_n^{(k+1)}(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} {}'[\nabla_k - 2X_{k+1}](c_n) T_n^{(k+1)}(x).$$

Nous établissons donc la recurrence $\nabla_{k+1} = \nabla_k - 2X_{k+1}$ avec $\nabla_0 = \nabla$. En tenant compte de la relation $X_k = X_0 - k\Delta$, on vérifie aisément que $\nabla - 2kX_0 + k(k+1)\Delta$ est solution de cette récurrence, ce qui achève la démonstration. \square

La proposition précédente permet d'appliquer des opérateurs différentiels d'ordre 2, les Φ_k , ou d'ordre 1, Θ , tout en restant dans la base de départ. Ceci permet "d'économiser" l'usage de l'opérateur de changement de base Δ que nous devrions utiliser pour suivre le schéma général. Ce fait se concrétise par les formules

$$X_{k+2}^2 - I + (2k+1)X_{k+2}\Delta = \Delta^2 N_k \quad (4.37)$$

$$X_{k+1}^2 - I = \Delta \nabla_k. \quad (4.38)$$

Appliquons ces résultats pour diminuer l'ordre des récurrences. Supposons que le polynôme p_r soit divisible par $x^2 - 1$ et notons $p_{1,r}$ le quotient correspondant. Nous pouvons alors écrire

$$L = p_{1,r}(x) \Theta \frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}} + \sum_{k=0}^{r-1} p_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

Si nous appliquons directement le schéma général, nous obtenons l'opérateur aux différences

$$\mathcal{L} = p_{1,r}(X_r)(X_r^2 - 1) + \sum_{k=0}^{r-1} p_k(X_r) \Delta^{r-k}$$

tandis que si nous utilisons la formule (4.36) nous obtenons

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n \right) = \sum_{n=r-1}^{\infty} \left[p_{1,r}(X_{r-1}) \nabla_{r-1} + \sum_{k=0}^{r-1} p_k(X_{r-1}) \Delta^{r-1-k} \right] (c_n) T_n^{(r-1)}. \quad (4.39)$$

L'ordre de l'opérateur aux différences qui apparaît ci-dessus est égal à l'ordre de \mathcal{L} moins 2. La formule (4.38) nous permet de vérifier que

$$\mathcal{L} = \Delta \left[p_{1,r}(X_{r-1}) \nabla_{r-1} + \sum_{k=0}^{r-1} p_k(X_{r-1}) \Delta^{r-1-k} \right].$$

Ainsi le gain d'ordre correspond bien à la mise en facteur d'un opérateur de changement de base.

Supposons maintenant que l'opérateur L soit au moins d'ordre 2 et que nous puissions l'écrire sous la forme

$$L = p_{2,r}(x) \Phi_{r-2} \frac{d^{r-2}}{dx^{r-2}} + \sum_{k=0}^{r-2} p_k(x) \frac{d^k}{dx^k}.$$

A l'aide de la formule (4.35), nous obtenons alors

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n T_n \right) = \sum_{n=r-2}^{\infty} \left[p_{2,r}(X_{r-2}) N_{r-2} + \sum_{k=0}^{r-2} p_k(X_{r-2}) \Delta^{r-2-k} \right] (c_n) T_n^{(r-2)}. \quad (4.40)$$

Dans ce cas, nous abaissons l'ordre de l'opérateur aux différences de 4 ce que nous retrouvons dans la factorisation, utilisant la formule (4.37),

$$\mathcal{L} = \Delta^2 \left[p_{2,r}(X_{r-2}) N_{r-2} + \sum_{k=0}^{r-2} p_k(X_{r-2}) \Delta^{r-2-k} \right].$$

Ainsi en alliant au schéma général l'usage d'opérateurs particuliers issus des propriétés des polynômes hypergéométriques, pouvons diminuer l'ordre des récurrences associées à une équation différentielle.

Exemple 11 (suite de l'exemple 10).

En réorganisant l'opérateur L sous la forme

$$\begin{aligned} L &= x(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - (1+2x-2x^3) \frac{d}{dx} + (1+x) \\ &= -x\Phi_0 + (1+2x)\Theta + (1+x), \end{aligned}$$

il vient grâce aux formules (4.35) et (4.36)

$$L \left(\sum_{n=0}^{\infty} {}' c_n T_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \underbrace{[-X_0 n^2 + (1+2X_0) \nabla + 1 + X_0]}_{\mathcal{L}_1} (c_n) T_n.$$

Nous trouvons alors

$$\mathcal{L}_1(c_n) = (n-2)c_{n-2} - (1-3n+n^2)c_{n-1} + 2c_n - (1+3n+n^2)c_{n+1} - (n+2)c_{n+2}$$

ce qui correspond à la récurrence minimale de Lewanowicz.

4.2.2 Inversion de la récurrence de Chebyshev

Nous avons comparé la construction de la récurrence de Chebyshev à la transformation de Mellin formelle. Seulement nous avons montré, dans le contexte des séries de Chebyshev, qu'à une équation différentielle correspond une équation récurrente à coefficients polynomiaux, mais nous ne savons pas si à une équation récurrente à coefficients polynomiaux correspond une équation différentielle de manière aussi naturelle qu'existe la transformation de Mellin inverse. Autrement dit, à un opérateur aux différences donné correspond-t-il une liste de polynômes p_k tels que cet opérateur soit égal (au moins à un facteur rationnel près) à

$$\sum_{k=0}^r p_k(X_r) \Delta^{r-k} ?$$

Dans ce qui suit, nous supposerons que l'opérateur \mathfrak{R} est à coefficients polynomiaux puisqu'une récurrence de Chebyshev peut, d'après la proposition 35, se ramener à cette forme. Nous savons aussi que la récurrence de Chebyshev vérifie des propriétés de symétries telles que nous devons supposer pour que le problème soit bien posé que

$$\mathfrak{R} = \sum_{k=-e}^e \mathfrak{r}_k(n) E^k \quad \text{avec } \mathfrak{r}_k(-n) = -\mathfrak{r}_{-k}(n). \quad (4.41)$$

Nous décomposons chaque polynôme \mathfrak{r}_k en partie paire et impaire de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{r}}_k(n^2) &= \frac{\mathfrak{r}_k(n) - \mathfrak{r}_{-k}(n)}{2} && \text{(partie paire)} \\ n\check{\mathfrak{r}}_k(n^2) &= \frac{\mathfrak{r}_k(n) + \mathfrak{r}_{-k}(n)}{2} && \text{(partie impaire)} \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \sum_{k=0}^e ' \left[\mathfrak{r}_k(n) E^k + \mathfrak{r}_{-k}(n) E^{-k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^e ' \left[(\mathfrak{r}_k(n) - \mathfrak{r}_k(-n)) \frac{E^k + E^{-k}}{2} + (\mathfrak{r}_k(n) + \mathfrak{r}_k(-n)) \frac{E^k - E^{-k}}{2} \right] \\ &= \sum_{k=0}^e ' \left[2n\check{\mathfrak{r}}_k(n^2) T_k \left(\frac{E + E^{-1}}{2} \right) + 2\hat{\mathfrak{r}}_k(n^2) \frac{E - E^{-1}}{2} U_{k-1} \left(\frac{E + E^{-1}}{2} \right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^e ' \left[2n\check{\mathfrak{r}}_k(n^2) T_k(X_0) + 2\hat{\mathfrak{r}}_k(n^2) \frac{E - E^{-1}}{2} U_{k-1}(X_0) \right]. \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne utilise les propositions 15 et 17. Enfin en divisant l'opérateur \mathfrak{R} par n (nous devrions dire en toute rigueur : en composant l'opérateur \mathfrak{R} à gauche par l'opérateur $\frac{1}{n}I$) nous formons un opérateur qui se décompose de manière immédiate en opérateurs élémentaires relatifs aux séries

$$\frac{1}{2n} \mathfrak{R} = \sum_{k=0}^e ' \left[\check{\mathfrak{r}}_k(n^2) T_k(X_0) - \tilde{\mathfrak{r}}_k(n^2 - 1) \Delta U_{k-1}(X_0) \right]$$

où $\tilde{\mathfrak{r}}_k$ est le polynôme défini par $\tilde{\mathfrak{r}}_k(x-1) = \hat{\mathfrak{r}}_k(x)$. Nous voyons alors que l'opérateur différentiel

$$R = \sum_{k=0}^e' \left[\frac{d}{dx} \tilde{\mathfrak{r}}_k(\Phi_0) T_k(x) - \hat{\mathfrak{r}}_k(\Phi_1) U_{k-1}(x) \right] \quad (4.42)$$

est tel que, d'après les résultats des propositions 18 et 38,

$$R \left(\sum_{n=0}^{\infty}' b_n T_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \mathfrak{R}(b_n) T_n' .$$

Nous avons donc construit un opérateur différentiel qui génère un opérateur aux différences donné. Or nous savons, d'après la proposition 4.31, que l'opérateur \mathcal{L} de la récurrence de Chebyshev associée à un opérateur différentiel L se ramène *via* une multiplication par un polynôme à un opérateur \mathfrak{L} du type (4.41). Nous pouvons donc appliquer la méthode que nous venons de présenter à \mathfrak{L} pour lui associer un opérateur différentiel R . Une question vient à l'esprit : quel est le lien entre L et R ?

Une petite d'adaptation de la formule (4.35) provenant du constat que $\Psi_k \frac{d}{dx} = \Phi_k$ nous indique que

$$\Psi_k \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n T_n^{(k+1)} = \sum_{n=k}^{\infty} (n^2 - k^2) b_n T_n^{(k)} . \quad (4.43)$$

Alors en appliquant cette formule itérativement, il vient

$$\begin{aligned} \Psi_{r-1} \cdots \Psi_1 L \left(\sum_{n=0}^{\infty}' b_n T_n \right) &= \Psi_{r-1} \cdots \Psi_1 \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(b_n) T_n^{(r)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{r-1} (n^2 - k^2) \mathcal{L}(b_n) T_n' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathfrak{L}(b_n) T_n' . \end{aligned}$$

Ainsi l'opérateur R que l'on obtiendra par “inversion” de \mathfrak{L} est

$$R = 2^{r-1} \Psi_{r-1} \cdots \Psi_1 L .$$

Nous pourrons donc reconstituer L en éliminant les facteurs à gauche.

Dans le cas d'un opérateur d'ordre 1, nous avons directement $R = L$. Vérifions ce fait. L'opérateur L est de la forme

$$L = p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) .$$

Nous savons d'après la proposition 34 que si les polynômes p_0 et p_1 s'écrivent dans la base de Chebyshev

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^e' \alpha_k T_k(x) \quad \text{et} \quad p_0(x) = \sum_{k=0}^{e-1} \beta_k T_k(x)$$

alors

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=-e}^e (a_k n + b_k) \mathbf{E}^k$$

avec $a_k = \alpha_k$ et $b_k = (\beta_{k+1} - \beta_{k-1})/2 + k\alpha_k$. Nous avons alors $\check{r}_k(n) = a_k$ et $\hat{r}_k(n) = b_k$, l'opérateur R est donc

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^e ' a_k T_k(x) - \sum_{k=0}^{e-1} b_{k+1} U_k(x) .$$

Or on vérifie aisément que

$$p_0(x) - p'_1(x) = \sum_{k=0}^{e-1} \left(\frac{b_{k-1} - b_{k+1}}{2} - k\alpha_k \right) U_k(x) .$$

Donc $R = \frac{d}{dx} p_1(x) + p_0(x) - p'_1(x)$, ce qui établit l'égalité entre L et R .

Finssons avec un exemple.

Exemple 12 Nous considérons l'opérateur $L = \frac{d^3}{dx^3} - 1$. L'opérateur à coefficients polynômaux construit par le schéma général est

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} = & -(n+1)(n+2)\mathbf{E}^{-3} + 3(n-1)(n+2)\mathbf{E}^{-1} + 8(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)\mathbf{I} \\ & -3(n-2)(n+1)\mathbf{E} + (n-2)(n-1)\mathbf{E}^3 \end{aligned}$$

L'opérateur différentiel R construit à partir de \mathfrak{L} est

$$\begin{aligned} R = & 4(x^2 - 1)^2 \frac{d^5}{dx^5} + 40(x^3 - x) \frac{d^4}{dx^4} + 20(4x^2 - 1) \frac{d^3}{dx^3} \\ & + 4(x^2 - 1)^2 \frac{d^2}{dx^2} + 40(x - x^3) \frac{d}{dx} + 20(4x^2 - 1) \end{aligned}$$

et on peut vérifier que

$$R = 4 \left((x^2 - 1) \frac{d}{dx} + 5x \right) \left((x^2 - 1) \frac{d}{dx} + 3x \right) L$$

ce qui était le résultat attendu.

4.2.3 Séries de Chebyshev Holonomes

Nous avons introduit, et largement utilisé, la notion d'équations différentielles holonomes. Mais on peut aussi définir les fonctions holonomes comme étant les fonctions qui vérifient une équation différentielle holonome. Ces fonctions ont la particularité de former une algèbre puisque que la somme et le produit de 2 fonctions holonomes sont holonomes. Cette propriété se démontre de manière constructive basée sur l'élimination de Gauss. Ce fait connu depuis le début du siècle était tombé un peu dans l'ombre du fait de l'impossibilité de pratiquer les calculs à la main mais a repris de la vigueur grâce au calcul formel. Il a été implémenté simultanément par B. Salvy et P. Zimmermann [60] et W. Koepf [33]. Nous pouvons accroître encore un peu la portée du concept d'holonomie en définissant

les séries de Taylor (respectivement de Chebyshev) formelles holonomes comme étant les séries de Taylor (resp. de Chebyshev) - convergentes ou non - qui vérifient formellement une équation différentielle holonome. Le cas de série de Taylor est bien étudié, celui de Chebyshev l'est moins. D'après les résultats vus plus haut, une série de Taylor est holonome si et seulement si ses coefficients vérifient une équation récurrente à coefficients polynomiaux (obtenue grâce à la transformation de Mellin formelle). De ce fait si la série de Chebyshev

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a_n T_n(x)$$

est holonome, la série de Taylor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

l'est aussi. Nous nous proposons de montrer la réciproque.

Théorème 6

|| *Si la série de Taylor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

est holonome, alors la série de Chebyshev

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a_n T_n(x)$$

l'est aussi et vérifie une équation différentielle holonome d'ordre au plus le double de celui d'une équation vérifiée par la série de Taylor.

Nous allons rappeler succinctement la méthode pour obtenir l'équation différentielle holonome vérifiée par la somme de deux fonctions holonomes. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux deux références sus-mentionnées. Nous allons de plus présenter une forme particulière du résultat spécialement adaptée à notre problème. Pour cela nous rappelons que la notation θ désigne la dérivation d'Euler (*i.e.* $x \frac{d}{dx}$). Tout opérateur holonome peut être considéré comme un opérateur de l'algèbre $\mathbb{C}[x, x^{-1}, \theta]$. Nous allons travailler dans cette algèbre. Soient donc f et g deux fonctions vérifiant les équations

$$F_n(x)f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} F_k(x)f^{(k)} + R(x) \quad (4.44)$$

et

$$G_m(x)g^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} G_k(x)g^{(k)} + S(x) \quad (4.45)$$

où les F_k , les G_k , R et S sont des polynômes en x et x^{-1} et où la notation $y^{(k)}$ indique $\theta^k y$. Si l'on dérive (au sens de θ) l'équation (4.44), respectivement l'équation (4.45), on établit aisément et de manière constructive, que le terme $F_n(x)f^k$ (resp. $G_m(x)g^k$) s'écrit, quelque soit k , comme somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux de $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ (resp. $g, g', \dots, g^{(m-1)}$). Et une combinaison

linéaire évidente (et non optimale) permet d'écrire les termes $F_n(x)G_m(x)(f+g)^k$, quelque soit k , comme somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire à coefficients polynômaux de $f, f', \dots, f^{(n-1)}, g, g', \dots, g^{(m-1)}$. Puisque chaque terme $F_n(x)G_m(x)(f+g)^k$ est déterminé par $n+m+1$ coefficients polynômaux, l'algèbre linéaire nous assure que les termes $F_n(x)G_m(x)(f+g)^k$ pour k variant de 0 à $n+m+1$ (soit $n+m+2$ termes) sont linéairement dépendants, la combinaison linéaire pouvant être obtenue par élimination gaussienne et produisant une équation différentielle holonome d'ordre $n+m+1$ vérifiée par $f+g$.

D'après la propriété 15, nous pouvons considérer une série de Chebyshev une série de Laurent symétrique. En effet, en posant $z = (x + x^{-1})/2$, il vient

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a_n T_n(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \right).$$

Supposons que la série $f = \sum a_n x^n$ vérifie (même formellement) l'équation holonome

$$A(x)\theta^n f = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}(x)\theta^k f + B_n(x). \quad (4.46)$$

Nous avons choisi d'écrire les opérateurs différentiels en utilisant la dérivation d'Euler parce que celle-ci présente la bonne propriété suivante

$$t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \theta_t = -\theta_x.$$

Grâce à cette propriété il est facile de voir que la série $\sum a_n x^{-n}$ vérifie l'équation holonome

$$A(x^{-1})\theta^n g = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k}(x^{-1})(-1)^{n+k} \theta^k g + (-1)^n B_n(x^{-1}). \quad (4.47)$$

Et plus généralement en dérivant (toujours avec θ) l'équation (4.46) nous obtenons pour tout m ,

$$A(x)\theta^m f = \sum_{k=0}^{n-1} A_{m,k}(x^{-1})(-1)^{m+k} \theta^k f + B_m(x) \quad (4.48)$$

qui va de paire avec

$$A(x^{-1})\theta^m g = \sum_{k=0}^{n-1} A_{m,k}(x^{-1})(-1)^{m+k} \theta^k g + (-1)^m B_m(x^{-1}). \quad (4.49)$$

Et grâce au procédé que nous venons d'exposer nous obtenons une équation holonome vérifiée par $\sum a_n x^n + \sum a_n x^{-n}$. Le problème est de savoir si cette équation reste holonome en z après le changement de variable inverse $x \rightarrow z$.

Commençons par établir quelques résultats techniques. Nous rappelons les notations suivantes

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{x + x^{-1}}{2}, \\ v(x) &= \frac{x - x^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Et nous donnons le

Lemme 7

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$, que nous écrivons

$$P(x) = \sum_{k=-r}^s a_k x^k .$$

Nous posons $n = \max(r, s)$ et nous définissons

$$\begin{aligned} TP(z) &= 2 \sum_{k=0}^n (a_k + a_{-k}) T_k(z) , \\ UP(z) &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_{-k-1}) U_k(z) . \end{aligned}$$

Alors si $z = w(x)$, nous avons

$$P(x) + P(x^{-1}) = TP(z) \quad \text{et} \quad P(x) - P(x^{-1}) = v(x) UP(z) . \quad (4.50)$$

De plus, $P(x)P(x^{-1})$ est un polynôme en z de degré $r - s$.

Démonstration :

Les formules (4.50) sont l'application directe des propositions 15 et 17. Par ailleurs, il est clair que $P(x)P(x^{-1})$ est un polynôme de degré $r - s$ en x et en x^{-1} , et surtout invariant par le changement de variable $x \rightarrow x^{-1}$. Ainsi $P(x)P(x^{-1})$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $w(x^k)$ pour k variant de 0 à $r - s$, ce que nous savons réécrire en un polynôme en z grâce à la proposition 15. \square

Multiplions (4.48) par $A(x^{-1})$ et (4.49) par $A(x)$ et sommes. Puisque $A(x)A(x^{-1})$ est d'après la proposition ci-dessus un polynôme en z , nous pouvons poser

$$C(z) = 2A(x)A(x^{-1}) .$$

Nous posons aussi

$$\begin{aligned} C_{m,k}(x) &= A(x^{-1})A_{m,k}(x) , \\ D_m(x) &= A(x^{-1})B_m(x) + (-1)^m A(x)B_m(x^{-1}) . \end{aligned}$$

Alors un calcul simple utilisant la formule (4.34) permet d'obtenir

$$\begin{aligned} C(z)\theta^m(f+g) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(C_{m,k}(x) + (-1)^{m+k} C_{m,k}(1/x) \right) \theta^k(f+g) \right. \\ &\quad \left. + \left(C_{m,k}(x) - (-1)^{m+k} C_{m,k}(1/x) \right) \theta^k(f-g) \right] + D_m(x) . \end{aligned}$$

Les coefficients de $\theta^k(f+g)$ et $\theta^k(f-g)$ qui apparaissent dans la somme ci-dessus vont en vertu du lemme 7 et suivant la parité de $m + k$ être des polynômes en z ou des produits de polynômes en z par $v(x)$. Il en va de même pour $D_m(x)$ suivant la parité de m . Nous devons encore introduire des notations pour clarifier les choses. Ainsi nous posons

$$C_{m,k}^+(z) = \begin{cases} TC_{m,k}(z) & \text{si } m+k \text{ pair} \\ UC_{m,k}(z) & \text{si } m+k \text{ impair} \end{cases} ,$$

$$C_{m,k}^-(z) = \begin{cases} UC_{m,k}(z) & \text{si } m+k \text{ pair} \\ TC_{m,k}(z) & \text{si } m+k \text{ impair} \end{cases}$$

et

$$D_m^+(z) = \begin{cases} TD_m(z) & \text{si } m \text{ pair} \\ UD_m(z) & \text{si } m \text{ impair} \end{cases} .$$

Nous introduisons la notation

$$\{x\}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ pair} \\ x & \text{si } k \text{ impair} \end{cases} .$$

pour laquelle on pourra vérifier la propriété suivante

$$\{x\}_k \{x\}_l = \{\{x^2\}_k\}_l \{x\}_{k+l} . \quad (4.51)$$

Et enfin

$$e_k^+ = \{\mathbf{v}(x)\}_k \theta^k (f + g) \quad \text{et} \quad e_k^- = \{\mathbf{v}(x)\}_{k+1} \theta^k (f - g)$$

Alors, en remarquant que $\mathbf{v}(x)^2 = z^2 - 1$ et à l'aide des notations introduites ci-dessus nous avons

$$\begin{aligned} C(z) \{\mathbf{v}(x)\}_m \theta^m (f + g) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[C_{m,k}^+(z) \{\{z^2 - 1\}_m\}_k e_k^+ \right. \\ &\quad \left. + C_{m,k}^-(z) \{\{z^2 - 1\}_m\}_{k+1} e_k^- \right] + D_m^+(z) \{z^2 - 1\}_m . \end{aligned}$$

Maintenant les coefficients des e_k^+ et e_k^- sont polynomiaux en z , donc l'élimination Gaußienne va nous conduire à une équation de la forme

$$\sum_{m=0}^{2n} p_m(z) \{\mathbf{v}(x)\}_m \theta_x^m (f + g) = q(z) .$$

Pour achever la démonstration il reste à montrer que chaque opérateur $\{\mathbf{v}(x)\}_m \theta^m$ devient par le changement de variable inverse un opérateur holonome en z . Or nous avons les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x) \theta_x &= (z^2 - 1) \theta_z = \Theta_z , \\ \theta_x^2 &= (z^2 - 1) \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} = \Phi_z . \end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons écrire de manière synthétique

$$\{\mathbf{v}(x)\}_m \theta^m = \{\Theta_z\}_m \Phi_z^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$$

ce qui montre que la série $\sum a_n T_n(z)$ est solution de l'équation différentielle holome

$$\left[\sum_{m=0}^{2n} p_m(z) \{\Theta_z\}_m \Phi_z^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right] y = q(z)$$

dont la méthode de construction précède.

Un intérêt des calculs que nous venons de présenter est de permettre la construction

4.3 Conclusion

d'une équation différentielle telle que la récurrence de Chebyshev associée est une solution déterminée à l'avance. Cette possibilité est très intéressante pour l'étude des solutions formelles que nous allons effectuer dans le chapitre suivant. Donnons un exemple qui génère une série de Chebyshev calquée sur la série d'Euler.

Exemple 13 La série formelle

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-1)! x^n$$

est solution formelle de l'équation d'Euler

$$x^2 y' + y = x .$$

Nous voulons, pour des raisons qui apparaîtront plus tard, trouver une équation différentielle dont la récurrence de Chebyshev associée ait $c_n = (-1)^n (n-1)!$ pour solution. La méthode exposée plus haut nous donne cette équation qui est

$$x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + (1+x)y = -x^2 .$$

4.3 Conclusion

La fin de ce chapitre a été assez calculatoire et technique mais il est important de souligner que les calculs que nous avons détaillés ci-dessus ont donné lieu à une programmation en MAPLE. Les procédures correspondantes ont d'ailleurs servi à générer les exemples présentés.

Chapitre 5

Solutions de Chebyshev formelles d'une EDO

Après nous être intéressé à la récurrence de Chebyshev pour elle-même, nous nous concentrerons dans ce chapitre aux solutions de la récurrence de Chebyshev.

5.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 3, que les coefficients de Chebyshev c_n d'une solution de l'équation différentielle holonome

$$Ly = q \quad (5.1)$$

vérifient l'équation aux différences donnée par la proposition 22)

$$\mathcal{L}(c_n) = q_n, \quad \forall n \geq r. \quad (5.2)$$

On pourrait penser que cette dualité équation différentielle-équation aux différences va permettre de résoudre l'équation (5.1) comme nous le ferions avec des séries de Taylor en un point régulier. Or, il en va très différemment. Et avant de présenter le problème relatif aux séries de Chebyshev, nous allons faire un court rappel sur la résolution au moyen des séries de Taylor.

Ainsi, supposons que le point $x = 0$ soit un point ordinaire de l'équation (5.1). Nous savons, d'après la théorie des équations différentielles linéaires, qu'il existe un système fondamental de solutions analytiques en 0,

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)} x^n, \dots, \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(r)} x^n \right\}$$

de rayons de convergence au moins égaux au module de la plus proche singularité. De plus, les r suites $a^{(k)}$ constituent un système fondamental de l'équation aux différences

$$\mathcal{M}(L)a_n = \tilde{q}_n \quad n \geq 0 \quad (5.3)$$

où $\mathcal{M}(L)$ est la transformée de Mellin de l'opérateur L , où les \tilde{q}_n sont les coefficients de Q dans la base canonique et où l'on convient que $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$ pour traiter les effets de bords dans l'équation.

Exemple 14 Considérons l'équation différentielle

$$Ly = (6 + 5x + x^2)y'' - (2 + 4x + x^2)y' - (4 + x)y = 0$$

dont deux solutions linéairement indépendantes sont e^x et $\frac{1}{2+x}$. La récurrence associée par la transformation de Mellin à cette équation est

$$-na_{n-1} + (n^2 - 5n - 4)a_n + (5n^2 + 3n - 2)a_{n+1} + 6(n+1)(n+2)a_{n+2} = 0 \quad (5.4)$$

pour $n \geq 0$. La valeur de a_{-1} étant fixée à zéro, on détermine complètement une solution en donnant les valeurs a_0 et a_1 . L'espace des solutions de la récurrence (5.4) est de dimension 2 comme celui des solutions de l'équation différentielle. Enfin, on vérifie aisément que

$$\begin{aligned} \text{si } a_0 = 1 \text{ et } a_1 = 1 \text{ alors } a_n = \frac{1}{n!} \\ \text{si } a_0 = \frac{1}{2} \text{ et } a_1 = -\frac{1}{4} \text{ alors } a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \end{aligned}$$

Les deux suites ainsi déterminées correspondent respectivement aux coefficients des développement de Taylor de e^x et $\frac{1}{2+x}$.

En somme un choix aléatoire des conditions initiales dans la relation de récurrence (5.3) permet de déterminer une quelconque solution de l'équation différentielle (5.1).

Avec les séries de Chebyshev, la situation n'est pas aussi simple. Considérons l'équation différentielle $y' - ay = 0$. La récurrence de Chebyshev associée est

$$c_{n-1} - \frac{2n}{a}c_n - c_{n+1} = 0, \quad n \geq 1$$

qui est d'ordre 2 et donc l'espace des solutions présente une dimension de trop. De fait, nous connaissons déjà une solution à cette relation de récurrence à savoir $\{2I_n(a)\}$ puisqu'il s'agit de la suite des coefficients de Chebyshev de e^{ax} qui est solution de l'équation différentielle, tandis qu'une solution linéairement indépendante est $(-1)^n K_n(a)$ où K_n est aussi une fonction de Bessel modifiée. Or la série de Chebyshev dont le terme général est $(-1)^n K_n(a)$, est divergente.

Le phénomène qui est apparu dans l'exemple précédent est général et se résume ainsi : toute suite solution de la récurrence de Chebyshev (5.2) n'est pas la suite des coefficients de Chebyshev d'une fonction solution de l'équation (5.1). En effet, nous avons vu plus haut que l'ordre l'opérateur \mathcal{L} est $2e$, où $e = \text{ext}(L)$, et plus précisément que

$$\mathcal{L} = \sum_{k=-e}^e l_k(n) \mathbf{E}^k$$

où les $l_k(n)$ sont des fractions rationnelles. Mais il est facile de voir que, du fait de la convention $c_n = c_{-n}$ dans la récurrence (5.2), les solutions de celle-ci sont déterminées par les $r+e$ premiers termes. Si, de plus, le coefficient de tête $l_e(n)$ ne s'annule pas pour $n \geq r$ (cas générique) nous pouvons même affirmer que l'espace des solutions de la récurrence de Chebyshev est égal à $r+e$. Ce qui représente au moins le double de la dimension de l'espace des solutions de l'équation différentielle (5.1). En résumé,

5.2 Exemples

Proposition 39

Supposons que l'équation (5.1) soit ordinaire en tout point de l'intervalle $[-1, 1]$.

Supposons aussi que le coefficient $l_e(n)$ de \mathcal{L} soit non nul pour tout $n \geq r$. Alors il existe une base de suites

$$\{c^{(1)}, c^{(2)}, \dots, c^{(r+e)}\}$$

de l'espace des solutions de l'équation (5.2) telles que

- les suites $c^{(1)}, \dots, c^{(r)}$ sont les suites des coefficients de Chebyshev de r fonctions formant un système fondamental de solutions de l'équation (5.1),
- aucune suite $c^{(r+1)}, \dots, c^{(r+e)}$ ni aucune combinaison linéaire de celles-ci, ne constitue la suite des coefficients de Chebyshev d'une solution de l'équation (5.1).

Cette proposition nous amène à donner la définition suivante

Définition 13

Nous appelons *solution formelle* (de Chebyshev) de l'équation différentielle (5.1), une série de Chebyshev formelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n$$

telle que la suite $\{c_n\}$ est solution de la récurrence de Chebyshev (5.2).

Le but de ce chapitre est de caractériser les solutions formelles "surnuméraires", c'est-à-dire celles qui ne sont pas le développement d'une fonction solution de l'équation différentielle. Par "caractériser" nous entendons : déterminer le comportement asymptotique des coefficients de ces solutions et trouver éventuellement le lien entre les solutions formelles et les solutions de l'équation différentielle originelle.

5.2 Exemples

Commençons par quelques exemples pour lesquels les solutions formelles sont connues. Nous avons donné une méthode au chapitre précédent pour construire une équation différentielle ayant une solution formelle donnée mais il est plus difficile d'avoir une équation dont **toutes** les solutions sont connues. Cela explique que nous retrouverons les exemples suivants tout au long de ce chapitre.

5.2.1 Cas des fractions rationnelles

Nous avons donné plus haut la série de Chebyshev de la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x-b} \quad b \notin [-1, 1]$$

qui est solution de la pseudo équation différentielle $(x-b)y = 1$ à laquelle est associée la récurrence de Chebyshev

$$c_{n-1} - 2bc_n + c_{n+1} = 4\delta_{0,n}, \quad n \geq 0. \quad (5.5)$$

Comme nous l'avions fait auparavant, découplons cette récurrence en une contrainte

$$-bc_0 + c_1 = 4 \quad (5.6)$$

et une équation récurrente homogène

$$c_{n-1} - 2bc_n + c_{n+1} = 0, \quad n \geq 1. \quad (5.7)$$

Soit $c = w^-(b)$ i.e. le complexe de module inférieur à 1 tel que $w(c) = b$. Alors les suites de termes généraux Ac^n et Bc^{-n} , où A et B sont des constantes arbitraires, sont solutions de l'équation récurrente (5.7). Déterminons A pour que Ac^n vérifie la contrainte (5.6),

$$bA + Ac = 1 = A \left(-\frac{c + c^{-1}}{2} + c \right) = A \frac{c - c^{-1}}{2} \quad (5.8)$$

ce qui nous donne

$$A = \frac{8}{c - c^{-1}}.$$

Par substitution de c^{-1} à c nous obtenons B tel que Bc^{-n} vérifie la contrainte, à savoir

$$B = \frac{8}{c^{-1} - c}.$$

En soustrayant les 2 solutions particulières correspondant aux valeurs de A et B calculées ci-dessus nous obtenons une solution de l'équation homogène associée. Nous ne serons pas étonnés que cette solution soit

$$\frac{8}{c - c^{-1}}(c^n + c^{-n}) = \frac{16}{c - c^{-1}}T_n(b)$$

puisque nous avons reconnu dans (5.7) la récurrence à 3 termes qui définit les polynômes de Chebyshev. Ainsi la solution générale de l'équation (5.5) est donnée par

$$\frac{8}{c - c^{-1}} c^n + \mu T_n(b)$$

où μ est une constante arbitraire. Autrement dit, les solutions formelles de l'équation $(b - x)y = 1$ sont les séries

$$\frac{8}{c - c^{-1}} \sum_{n=0}^{\infty} (c^n + \mu T_n(b)) T_n(x).$$

Parmi l'infinité de solutions formelles, seule celle pour laquelle $\mu = 0$ est convergente.

5.2.2 Autres exemples

Exemple 15 Considérons l'équation différentielle à coefficients constants

$$a_r y^{(r)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

Nous supposerons que les racines α_k du polynôme caractéristique de $a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$ sont distinctes. Les coefficients c_n d'une solution formelle de l'équation vérifient l'équation aux différences

$$\prod_{k=1}^r \left(\Delta - \frac{1}{\alpha_k} \right) (c_n) = 0. \quad (5.9)$$

5.3 Etude des solutions formelles : approche indirecte

Or, pour un a donné, l'équation $(\Delta - \frac{1}{a})(c_n) = 0$, i.e. $-c_{n+1} + \frac{2n}{a}c_n + c_{n-1} = 0$, a les 2 solutions linéairement indépendantes $I_n(a)$ et $(-1)^n K_n(a)$ où I_n et K_n sont les fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce (voir Abramowitz [1, §9.6]). Nous voyons alors facilement que l'équation (5.9) a les $2r$ solutions indépendantes suivantes

$$I_n(\alpha_k) \text{ et } (-1)^n K_n(\alpha_k), \quad k = 1 \cdots r.$$

Par ailleurs, nous connaissons le comportement asymptotique des fonctions de Bessel quand n tend vers l'infini

$$|I_n(a)| \sim \frac{|a|^n}{2^n n!} \quad \text{et} \quad |K_n(a)| \sim \frac{2^{n+1} n!}{|a|^n}. \quad (5.10)$$

Nous constatons donc que les solutions formelles $\sum' I_n(\alpha_k)T_n$ sont convergentes tandis que les solutions $\sum' (-1)^n K_n(\alpha_k)T_n$ sont divergentes. Et les solutions convergentes correspondent bien aux solutions de l'équation différentielle puisque

$$e^{\alpha_k x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} 'I_n(\alpha_k)T_n(x).$$

Exemple 16 Considérons l'équation différentielle $(2 + x)y' - 1 = 0$ dont les solutions sont de la forme $\log(2 + x)$ plus une constante et peuvent être développées en série de Chebyshev (en utilisant la formule (3.49))

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-2 + \sqrt{3})^n}{n} T_n + \lambda.$$

La récurrence de Chebyshev associée est

$$(n + 1)c_{n+1} + 4nc_n + (n - 1)c_{n-1} = 2\delta_{1,n}.$$

Nous pouvons vérifier que les solutions formelles sont

$$\lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-2 + \sqrt{3})^n}{n} T_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-2 + \sqrt{3})^n + (-2 - \sqrt{3})^n}{n} \right) T_n.$$

Pour $\mu \neq 0$ la série formelle n'est pas convergente et donc pas le développement d'une solution de l'équation.

5.3 Etude des solutions formelles : approche indirecte

Nous voulons étudier le comportement asymptotiques des coefficients de solution formelles et pour cela nous disposons d'une équation aux différences vérifiée par celles-ci. Or il existe des résultats pour réaliser cette étude pour les séries de Taylor solutions formelles d'une équation différentielle. En établissant un lien entre la récurrence de Chebyshev et une équation différence adéquate, nous pourrons utiliser les résultats propres aux séries de Taylor pour étudier les solutions formelles de Chebyshev.

5.3.1 Equations aux différences-Equations différentielles

Nous avons introduit plus haut la dualité qui existe entre opérateurs aux différences et opérateurs différentiels. Avec la prise en compte d'un second membre, on établit la même dualité entre équations aux différences et équations différentielles. Au formalisme près, on trouvera la proposition suivante (que nous avons placée dans un cadre un peu plus général) dans les travaux Pincherle [54].

Proposition 40

Soit \mathfrak{R} un opérateur aux différences à coefficients polynomiaux

$$\mathfrak{R} = \sum_{k=m}^M r_k(n) \mathbf{E}^k$$

où m et M sont des entiers avec $m \leq M$. Soit les suites $\{f_n\}_{n \geq 0}$ et $\{c_n\}_{n \geq 0}$ et n_0 un entiers naturel tels que nous ayons

$$\mathfrak{R}(c_n) = f_n, \quad n \geq n_0.$$

Appelons R l'opérateur différentiel obtenu par la transformation de Mellin de \mathfrak{R} i.e.

$$R = \mathcal{M}(\mathfrak{R}) = \sum_{k=m}^M r_k(\theta_x) x^{-k}.$$

Alors il existe un polynôme p de $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ tel que

$$R \left(\sum_{n \geq 0} c_n x^n \right) = p(x) + \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k x^k.$$

Démonstration :

En remarquant que $\theta_x^l(x^m) = m^l x^m$, nous appliquons l'opérateur R sur la série de Taylor de coefficients c_n

$$\begin{aligned} R \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) &= \sum_{k=m}^M \sum_{n=0}^{\infty} c_n r_k(\theta_x) x^{n-k} \\ &= \sum_{k=m}^M \sum_{n=0}^{\infty} c_n r_k(n-k) x^{n-k} \\ &= \sum_{k=m}^M \sum_{n=-k}^{\infty} c_{n+k} r_k(n) x^n. \end{aligned}$$

Pour simplifier la permutation de somme nous convenons que $c_k = 0$ pour $k < 0$, ce qui nous permet d'écrire

$$R \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = \sum_{k=m}^M \sum_{n=-M}^{\infty} c_{n+k} r_k(n) x^n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=-M}^{\infty} \left(\sum_{k=m}^M r_k(n) c_{n+k} \right) x^n \\
 &= \underbrace{\sum_{n=-M}^{n_0-1} \left(\sum_{k=m}^M r_k(n) c_{n+k} \right) x^n}_{p(x)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{k=m}^M r_k(n) c_{n+k} \right) x^n
 \end{aligned}$$

avec évidemment $p(x) \in \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Nous finissons le calcul sur la dernière somme par

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\sum_{k=m}^M r_k(n) c_{n+k} \right) x^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{L}(c_n) x^n = \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n x^n.$$

Nous obtenons donc

$$R \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) = p(x) + \sum_{k=n_0}^{\infty} f_n x^n.$$

□

Ainsi toute suite solution d'une équation aux différences à coefficients polynomiaux est la suite des coefficients d'une série de Taylor solution formelle d'une équation différentielle liée à l'équation aux différences par la transformation de Mellin formelle. Voyons donc comment utiliser ce résultat, en commençant par introduire la notion de polygone de Newton.

5.3.2 Polygone de Newton d'un opérateur différentiel

On peut trouver les définitions qui suivent dans [55]. La notation ∂_x désigne la dérivation par rapport à x . Considérons un opérateur différentiel $L \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, \partial_x]$. Cet opérateur s'écrit donc

$$L = p_r(x) \partial_x^r + \cdots + p_1(x) \partial_x + p_0(x), \quad \text{avec } p_i(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} p_{i,j} x^j$$

les $p_{i,j}$ non nuls étant en nombre fini. A cet opérateur est associé un polygone de Newton, que nous définissons comme suit. Soit

$$\mathcal{Q}^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \geq 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq 0, y \leq 0\}$$

respectivement les deuxième et troisième quadrants de \mathbb{R}^2 . Nous définissons

$$\mathcal{Q}^+(u, v) = \mathcal{Q}^+ + (u, v) \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}^-(u, v) = \mathcal{Q}^- + (u, v)$$

leurs translatés respectifs par rapport à un point (u, v) de \mathbb{R}^2 . Nous posons

$$M^+(L) = \bigcup_{p_{i,j} \neq 0} \mathcal{Q}^+(i, j-i) \quad \text{et} \quad M^-(L) = \bigcup_{p_{i,j} \neq 0} \mathcal{Q}^-(i, j-i)$$

et nous définissons enfin $\mathcal{Q}^+(L)$ comme l'enveloppe convexe inférieure de $M^+(L)$ et $\mathcal{Q}^-(L)$ l'enveloppe convexe supérieure de $M^-(L)$. Il vient alors la définition suivante

Définition 14 $\mathcal{Q}^+(L)$ est appelé polygone de Newton en 0 de l'opérateur L . $\mathcal{Q}^-(L)$ est appelé polygone de Newton à l'infini de L . Enfin le polygone complet de L est défini par

$$\mathcal{Q}(L) = \mathcal{Q}^+(L) \cap \mathcal{Q}^-(L).$$

Définissons quelques éléments caractéristiques du polygone de Newton de L .

Les pentes

Le polygone $\mathcal{Q}^+(L)$ a S pentes finies strictement positives et $\mathcal{Q}^-(L)$ a s pentes finies strictement négatives que nous noterons respectivement

$$0 < k_1^+ < \dots < k_S^+ \text{ et } 0 > k_1^- > \dots > k_s^-.$$

Remarque : S et s peuvent être nuls. Notons A_k l'arête de $\mathcal{Q}(L)$ de pente k . Notons $l(k)$ la longueur de la projection de $A_k \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ sur l'axe des abscisses. De plus, le polygone complet $\mathcal{Q}(L)$ peut posséder, sur la droite $y = r$, une arête verticale A_∞ .

Les polynômes caractéristiques

Si k est l'une des pentes finies non nulles de $\mathcal{Q}(L)$ et si (i_k, j_k) est l'extrémité d'abscisse minimale de A_k alors on appelle polynôme caractéristique associée à la pente k le polynôme

$$C_k(X) = \sum_{(i,j) \in A_k} p_{i,j+i} X^{i-i_k},$$

ce polynôme est de degré $l(A_k)$. Si $k = \infty$

$$C_\infty(X) = X^{-\nu} p_r(X)$$

où ν est la valuation de p_r .

Remarque : le polygone de Newton peut présenter des arêtes de pente nulle auxquelles on peut associer des polynômes caractéristiques. Ces pentes qui contiennent des informations importantes (classification des équations différentielles, algorithme de Frobenius) n'interviendront cependant pas dans la suite de notre propos.

Les k -caractéristiques

On appelle, pour k fini, k -caractéristiques les valeurs $\Lambda_{k,\nu} = |\lambda_{k,\nu}|^{-1/k}$ où $\lambda_{k,\nu}$ est racine de l'équation $C_k(X) = 0$ dite équation caractéristique associée à la pente k . Les ∞ -caractéristiques les valeurs $\Lambda_{\infty,\nu} = |\lambda_{\infty,\nu}|^{-1}$ où $\lambda_{k,\nu}$ est racine de $C_\infty(X) = 0$.

La figure 5.1 donne un exemple de polygone de Newton avec ses polynômes caractéristiques.

Remarque : il est facile de vérifier que les polygones de Newton des opérateurs L_1 et $L_2 = x^n L_1$ ($n \in \mathbb{Z}$) sont identiques à une translation verticale près et qu'ils ont les mêmes équations caractéristiques. Cette remarque permet de se ramener à des opérateurs différentiels à coefficients en x et non plus en x et x^{-1} .

5.3.3 Un théorème de Ramis

Donnons les définitions suivantes

Définition 15 Une suite $\{a_n\}$ est dite Gevrey d'ordre au plus s , $s \in \mathbb{R}$, si il existe une constante C telle que pour tout n

$$|a_n| \leq C(n!)^s.$$

H

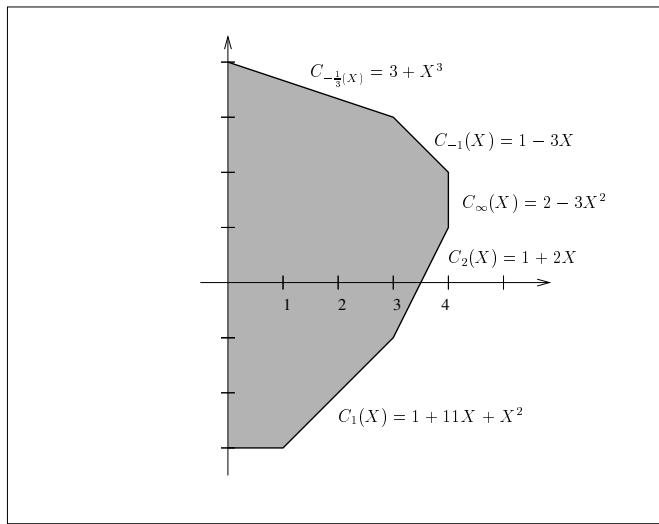


FIG. 5.1 – Polygone de Newton complet de l'opérateur différentiel $L = (2x^5 - 3x^6)\partial_x^4 + (x^2 + x^6)\partial_x^3 + (11 + x^3)\partial_x^2 + (x^{-2} - 7x^4)\partial_x + x^{-3} + 3x^5$

Définition 16 Une suite $\{a_n\}$ est dite *Gevrey d'ordre précis* (s, A), $s \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^{*+}$, si

$$\limsup((n!)^{-s}|a_n|)^{1/n} = A.$$

L'ordre *Gevrey précis* est d'une $\{a_n\}$, lorsqu'il existe, est unique.

Ces définitions posées nous avons le théorème suivant dû à J.-P. Ramis [56].

Théorème 7

Si la série formelle $\hat{y} = \sum a_n x^n$ est solution formelle de l'équation différentielle

$$Ly = f$$

où $L \in \mathbb{C}[x, x^{-1}, \partial_x]$ et f une série de Taylor convergente. Alors la série \hat{y} est

- soit convergente et $\{a_n\}$ est *Gevrey d'ordre précis* (s, A) avec $s = \frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes strictement négatives ou la pente infinie (auquel cas on convient que $\frac{1}{\infty} = 0$), de $\mathcal{Q}^-(L)$ et A l'une des k -caractéristiques.
- soit $\{a_n\}$ est *Gevrey d'ordre précis* (s, A) avec $s = \frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes finies strictement positives de $\mathcal{Q}^+(L)$ et A l'une des k -caractéristiques.

Ce résultat reste vrai si f est de la forme

$$x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}$$

où la série est toujours convergente. En effet le théorème est appliquable à $x^n L = x^n f$ et d'après la remarque faite plus haut nous savons que L et $x^n L$ ont mêmes pentes et mêmes k -caractéristiques. De ce fait le théorème de Ramis s'applique à l'équation

$$Ry = p(x) + \sum_{k=n_0}^{\infty} f_k x^n$$

générée par la proposition 40 à partir d'une équation aux différences permettant de conclure sur le comportement asymptotiques des solutions de cette dernière.

5.3.4 Application aux séries de Chebyshev

Appliquons les résultats précédents aux solutions formelles de Chebyshev qui vérifient la récurrence de chebyshev

$$\mathfrak{L}(c_n) = q_n \quad n \geq r.$$

Nous pouvons appliquer à cette récurrence la transformation de Mellin et le théorème de Ramis ce qui conduit au théorème suivant

Théorème 8

Supposons que la série de Chebyshev $\hat{y} = \sum c_n T_n$ soit solution formelle de l'équation différentielle holonome (5.1). Soient \mathfrak{L} l'opérateur aux différences associé à la récurrence de Chebyshev et $\mathbb{L} = \mathcal{M}(\mathfrak{L})$ sa transformée de Mellin formelle. Alors la série \hat{y} est

- soit convergente et $\{c_n\}$ est Gevrey d'ordre précisé (s, A) avec $s = \frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes non nulles de $\mathcal{Q}^-(\mathbb{L})$ et A l'une des k -caractéristiques.
- soit $\{c_n\}$ est Gevrey d'ordre précisé (s, A) avec $s = \frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes non nulles de $\mathcal{Q}^+(\mathbb{L})$ et A l'une des k -caractéristiques.

Pour les 2 éventualités ci-dessus nous ne supposons pas k fini en convenant toujours que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Nous pouvons même être plus précis du fait de la structure particulière de l'opérateur \mathfrak{L} . D'après la proposition 35 nous avons

$$\mathfrak{L} = \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(n) \mathbb{E}^k$$

avec $\mathfrak{l}_k(-n) = -\mathfrak{l}_{-k}(n)$. Cette structure implique que l'opérateur \mathbb{L} est invariant (au signe près) par le changement de variable $z = 1/x$. En effet, avec le changement de variable précédent il est immédiat d'établir que $\theta_x = -\theta_z$ et de ce fait nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(\theta_x) x^{-k} &= \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(-\theta_z) \left(\frac{1}{z}\right)^{-k} \\ &= \sum_{k=-e}^e -\mathfrak{l}_{-k}(\theta_z) z^k \\ &= - \sum_{k=-e}^e \mathfrak{l}_k(\theta_z) z^{-k} \quad (k \rightarrow -k). \end{aligned}$$

Or on peut établir (voir Ramis ou Malgrange) que les polygones $\mathcal{Q}^+(L_z)$ et $\mathcal{Q}^-(L_x)$ sont, à une translation près, symétriques par rapport à l'axe horizontale et que leurs polynômes caractéristiques ont mêmes racines au signe près (donc mêmes modules ce qui est l'essentiel). Donc d'après la propriété d'invariance $\mathcal{Q}^+(\mathbb{L})$ et $\mathcal{Q}^-(\mathbb{L})$ ont des pentes 2 à 2 opposées et les mêmes polynômes caractéristiques au signe près donc des k -caractéristiques 2 à 2 inverses. Ce que nous résumons par la

Proposition 41

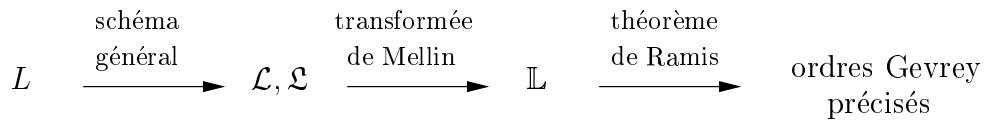
L'ensemble des ordres précisés “possibles” des solutions formelles de Chebyshev de l'équation $Ly = q$ est du type

$$\bigcup_{i \in I} \left\{ (s_i, A_i), (-s_i, \frac{1}{A_i}) \right\}$$

où les s_i sont les inverses des pentes du polygone de Newton de \mathbb{L} et les A_i les k -caractéristiques associées.

5.3.5 En résumé

Nous avons donc présenté une méthode permettant de cerner le caractère Gevrey des solutions formelles de Chebyshev d'une équation différentielle. Toutefois cette méthode requiert un certain nombre d'étapes intermédiaires résumée par le schéma suivant



Dans la prochaine section nous allons montrer que l'on peut déduire l'ordre Gevrey précisé des solutions formelles directement à partir de l'opérateur L au moyen d'un polygone spécifique que nous appellerons polygone de Newton-Chebyshev. Nous retrouverons sur ce polygone la symétrie des caractères Gevrey annoncée dans la proposition 41.

5.4 Polygone de Newton-Chebyshev

Nous considérons toujours l'opérateur différentiel holonome L écrit deux manières équivalentes

$$L = \sum_{k=0}^r p_k(x) \frac{d^k}{dx^k} = \sum_{k=0}^r \frac{d^k}{dx^k} \bar{p}_k(x) . \quad (5.11)$$

Nous introduisons alors l'opérateur différentiel \hat{L} obtenu à partir de L par le changement de variable $x \rightarrow z$ avec $x = w(z) = (z + z^{-1})/2$. Nous vérifions facilement que

$$\partial_x = \frac{2z^2}{z^2 - 1} \partial_z \stackrel{\text{def}}{=} \Omega_z .$$

Nous avons donc deux écritures alternatives pour l'opérateur \hat{L} , soit

$$\hat{L} = p_r \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \Omega_z^r + \cdots + p_1 \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \Omega_z + p_0 \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) \quad (5.12)$$

soit

$$\hat{L} = \Omega_z^r \bar{p}_r \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) + \cdots + \Omega_z \bar{p}_1 \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) + \bar{p}_0 \left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2} \right) . \quad (5.13)$$

5.4.1 Transformée de Mellin de \mathcal{L}

Nous avons introduit la transformation de Mellin comme isomorphisme de $\mathbb{C}[n, E, E^{-1}]$ sur $\mathbb{C}[z, z^{-1}, \partial_z]$. Appliquer la transformation de Mellin à des opérateurs de $\mathbb{C}[n, \frac{1}{n}, E, E^{-1}]$ nous permettrait de calculer la transformée de Mellin de l'opérateur \mathcal{L} . Aussi étendons la transformation de Mellin en posant

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{n}\right) = (\mathcal{M}(n))^{-1} = (\theta_z)^{-1} = \int z^{-1}$$

où l'opérateur \int est considéré comme “l'inverse” de la dérivation¹. De cette manière nous pouvons prolonger l'isomorphisme de Mellin de façon consistante pour obtenir un nouvel isomorphisme

$$\mathcal{M} : \mathbb{C}\left[n, \frac{1}{n}, E, E^{-1}\right] \longmapsto \mathbb{C}\left[z, z^{-1}, \partial_z, \int\right]$$

que nous pouvons appliquer aux opérateurs X_0 et Δ pour obtenir

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(X_0) &= \frac{z + z^{-1}}{2}, \\ \mathcal{M}(\Delta) &= \int \frac{z^2 - 1}{2z^2} = \Omega_z^{-1}.\end{aligned}$$

Alors en utilisant les propriétés d'isomorphisme, il vient

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \bar{p}_r\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + \Omega_z^{-1}\bar{p}_{r-1}\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right) + \cdots + \Omega_z^{-r}\bar{p}_0\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right).$$

Et donc, en factorisant Ω_z^{-r} , nous obtenons

$$\mathcal{M}(\mathcal{L}) = \Omega_z^{-r} \circ \hat{L}.$$

Enfin puisque $\mathfrak{L} = D_r(n)\mathcal{L}$, nous avons finalement

$$\mathcal{M}(\mathfrak{L}) = D_r(\theta_z) \circ \Omega_z^{-r} \circ \hat{L}.$$

Nous noterons désormais ξ_r l'opérateur $D_r(\theta_z) \circ \Omega_z^{-r}$. La factorisation de $\mathcal{M}(\mathfrak{L})$ sous la forme $\xi_r \circ \hat{L}$ va nous permettre construire son polygone de Newton. Pour commencer, montrons que l'opérateur ξ_r a priori intégral-différentiel est simplement différentiel. L'opérateur différentiel $\sqrt{x^2 - 1} \partial_x$ se transforme *via* le changement de variable $x = (z + z^{-1})/2$ en θ_z . Or nous savons que les polynômes de Chebyshev sont solutions des équations hypergéométriques (ici sous forme d'équation de Sturm-Liouville)

$$\left[\left(\sqrt{x^2 - 1} \partial_x\right)^2 - n^2\right](T_n(x)) = 0$$

pour tout $n > 0$. De plus, et trivialement, nous avons $\sqrt{x^2 - 1} \partial_x(T_0) = 0$. De ce fait, en rappelant que

$$D_r(x) = 2^r x \prod_{n=1}^{r-1} (x^2 - n^2),$$

¹Cet inverse est défini à une constante près. Il est néanmoins possible de justifier rigoureusement l'emploi d'un tel inverse. Dans notre cas cela n'est pas nécessaire puisque nous verrons que les intégrales introduites vont être “neutralisée” par des opérateurs différentiels.

5.4 Polygone de Newton-Chebyshev

nous obtenons que $D_r(\sqrt{x^2 - 1} \partial_x)(T_n) = 0$ pour $n = 0, 1, \dots, r - 1$. Ceci implique que l'opérateur $D_r(\sqrt{x^2 - 1} \partial_x)$ annule tout polynôme de degré strictement inférieur à r . Donc il se factorise à droite par ∂_x^r . L'opérateur a priori intégralo-différentiel

$$D_r(\sqrt{x^2 - 1} \partial_x) \circ \int^r$$

est donc simplement différentiel. Et par le changement de variable, il en est de même de l'opérateur ξ_r .

Proposition 42

$$\left\| \begin{array}{l} \text{L'équation différentielle } \xi_r(y) = 0 \text{ admet les } r \text{ solutions linéairement indépendantes suivantes} \\ y_{r,n} = \left(\frac{2z^2}{z^2 - 1} \partial_z \right)^r (1/z^n), \quad n = 0, \dots, r - 1. \end{array} \right.$$

Démonstration :

Sans donner le détail du calcul, on peut établir que suivant le choix des constantes d'intégration les valeurs de l'expression

$$\left(\int \frac{z^2 - 1}{2z^2} \right)^r f(z)$$

pour une fonction f donnée ne diffèrent que par une expression du type

$$\sum_{k=-r+1}^{r-1} a_k z^k.$$

Ainsi nous avons pour tout n compris entre 0 et $r - 1$,

$$\left(\int \frac{z^2 - 1}{2z^2} \right)^r y_{r,n} = 1/z^n + \sum_{k=-r+1}^{r-1} a_k z^k.$$

Comme par ailleurs, $D_r(\theta_z)(z^k) = 0$ pour k entier compris entre $-r + 1$ et $r - 1$, nous voyons que $\xi_r(y_{r,n})$ est nul. \square

Lemme 8

$$\left\| \begin{array}{l} \text{L'opérateur } \Omega_z^i \text{ se développe en} \\ \sum_{k=1}^i \frac{N_{i,k}(z)}{(z^2 - 1)^{2i-k}} \partial_z^k \end{array} \right.$$

où $N_{i,k}$ sont des polynômes vérifiant les propriétés suivantes :

- $N_{i,i} = (2z^2)^i$,
- $\deg(N_{i,k}) = 3i - k - 2$ pour $k < i$,
- $\text{val}(N_{i,k}) = i + k$.

Démonstration :

La démonstration se fait par récurrence avec beaucoup de calculs. Ce lemme étant uniquement un résultat technique nous ne donnons pas la démonstration *in extenso*. \square

Corollaire 6 *L'opérateur ξ_r est singulier régulier en 0 et en ∞ .*

Démonstration :

D'après le lemme 8 nous avons

$$\begin{aligned} y_{r,n} &= \sum_{k=1}^r \frac{N_{r,k}(z)}{(z^2 - 1)^{n+k}} \frac{d^k}{dz^k}(1/z^n) \\ &= \sum_{k=1}^r \frac{N_{r,k}(z)}{(z^2 - 1)^{n+k}} \frac{u_{n,k}}{z^{n+k}} \quad \text{où } u_{n,k} = (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \\ &= \frac{1}{z^{n+r}} \sum_{k=1}^r \frac{u_{n,k} z^{r-k} N_{r,k}(z)}{(z^2 - 1)^{n+k}} \end{aligned}$$

Or la somme à droite du facteur $\frac{1}{z^{n+r}}$ peut s'écrire comme une série de Taylor $S_{r,n}(z)$ de rayon de convergence au moins égal à 1. Nous avons donc une base de solutions de la forme

$$y_{r,n} = \frac{1}{z^{n+r}} S_{r,n}(z) \quad n = 1 \cdots r$$

ce qui démontre de ξ_r est bien singulier régulier en 0. Comme ξ_r est invariant par le changement de variable $z \rightarrow \frac{1}{z}$, l'opérateur est donc singulier régulier aussi en ∞ . \square

De ce fait le comportement Gevrey des solutions de $\xi_r \circ \hat{L}(y) = f$ est commandé par le polygone de Newton de \hat{L} . En effet,

$$\xi_r \circ \hat{L}(y) = f \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_r(\sigma) &= f \\ \hat{L}(y) &= \sigma \end{cases}.$$

Or ξ_r est singulier régulier en 0 et à l'infini, donc la seule pente non nul de son polygone de Newton est infinie ce qui signifie, par application du théorème de Ramis, que toute solution formelle σ de $\xi_r(\sigma) = f$ est convergente. On peut donc à nouveau appliquer le théorème de Ramis à $\hat{L}(y) = \sigma$ pour conclure.

5.4.2 Polygone de Newton de \hat{L}

Nous travaillerons sur la première forme de \hat{L} , i.e

$$\hat{L} = p_r \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) \Omega_z^r + \cdots + p_1 \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) \Omega_z + p_0 \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right)$$

pour en établir le polygone de Newton. Grâce au lemme 8 nous pouvons assurer que \hat{L} se factorise sous la forme

$$\frac{1}{(z^2 - 1)^{2q-1}} \cdot \sum_{i=0}^r p_i \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) (z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i$$

de sorte que le facteur de droite est élément de $\mathbb{C}[z, z^{-1}, \partial_z]$. Le polygone de Newton de \hat{L} sera donc le polygone de Newton de ce facteur.

Décrivons ce polygone. Pour cela il faut, dans un premier temps, étudier la contribution du terme

$$(z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i.$$

5.4 Polygone de Newton-Chebyshev

D'après le lemme 8 nous avons

$$(z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i = \sum_{k=1}^i (z^2 - 1)^{2q-2i+k-1} N_{i,k} \partial_z^k.$$

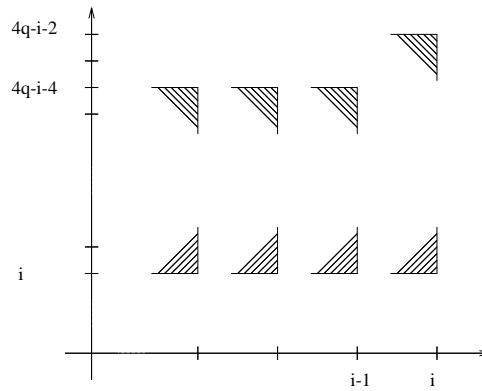
Calculons la contribution au polygone de Newton de chaque terme de cette somme. En considérant (toujours d'après le lemme 8) le degré et la valuation des $N_{i,k}$ nous obtenons pour chaque terme

$$\mathcal{Q}^-((z^2 - 1)^{2q-2i+k-1} N_{i,k} \partial_z^k) = \begin{cases} \mathcal{Q}^-(k, 4q - i - 4) & \text{si } k < i \\ \mathcal{Q}^-(n, 4q - i - 2) & \text{si } k = i \end{cases}$$

et

$$\mathcal{Q}^+((z^2 - 1)^{2q-2i+k-1} N_{i,k} \partial_z^k) = \mathcal{Q}^+(k, i).$$

Le graphique suivant synthétise ce résultat.



Il apparaît que $(z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i$ ne contribue aux pentes non nulles du polygone complet de \hat{L} que par le terme $(z^2 - 1)^{2q-1-i} (2z^2)^i \partial_z^i$ et plus précisément (en développant) : par le monôme $2^i z^{4q-2} \partial_z^i$ pour le polygone en l'infini et par le monôme $-(-2z^2)^i \partial_z^i$ pour le polygone en 0.

Posons maintenant $d_i = \deg(p_i)$ et p_{i,d_i} le coefficient dominant de p_i , il est immédiat de voir que

$$p_i \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) = \frac{p_{i,d_i}}{2^{d_i}} z^{d_i} + \cdots + \frac{p_{i,d_i}}{2^{d_i}} z^{-d_i}.$$

Nous en concluons que

$$\mathcal{Q}^- \left(p_i \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) (z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i \right) = \mathcal{Q}^- \left(\frac{p_{i,d_i}}{2^{d_i}} z^{d_i} 2^i z^{4q-2} \partial_z^i \right)$$

et

$$\mathcal{Q}^+ \left(p_i \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) (z^2 - 1)^{2q-1} \Omega_z^i \right) = \mathcal{Q}^+ \left(-\frac{p_{i,d_i}}{2^{d_i}} z^{-d_i} (-2z^2)^i \partial_z^i \right).$$

Tous ces éléments nous permettent d'établir les 2 polygones de Newton de \hat{L} :

$$\mathcal{Q}^- \left(\hat{L} \right) = \text{env}^- \left(\bigcup_{i=0}^r \mathcal{Q}^-(i, 2(2q-1) + d_i - i) \right)$$

et

$$\mathcal{Q}^+ \left(\hat{L} \right) = \text{env}^+ \left(\bigcup_{i=0}^r \mathcal{Q}^+(i, i - d_i) \right).$$

Ainsi nous constatons que les polygones $\mathcal{Q}^-(\hat{L})$ et $\mathcal{Q}^-(L)$ sont identiques à une translation verticale de vecteur $(0, 2(2q-1))$ près et que $\mathcal{Q}^-(\hat{L})$ et $\mathcal{Q}^+(\hat{L})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, comme nous l'avions prévu d'après la structure de \mathfrak{L} .

Maintenant nous allons calculer les polynômes caractéristiques relatifs aux pentes non nulles du polygone complet. Nous commencerons par le cas relativement simples des pentes finies d'abord les négatives puis les positives.

Considérons l'arête A_k de pente k négative. D'après la construction de $\mathcal{Q}^-(\hat{L})$ tout sommet de quadrant sur cette arête a des coordonnées de la forme $(i, d_i - i)$ et correspond au monôme $2^{i-d_i} p_{i,d_i} z^{d_i-i+4q-2} z^i \partial_z^i$. Soit $(i_{k,0}, j_{k,0})$ les coordonnées de l'extrémité gauche de A_k . Pour tout sommet sur cette arête on a donc $d_i - i = j_{k,0} + k(i - i_{k,0})$. Le polynôme caractéristique associé à A_k est alors

$$\begin{aligned} \hat{C}_k(X) &= \sum_{(i, d_i - i) \in A_k} 2^{i-d_i} p_{i,d_i} X^{i-i_{k,0}} \\ &= \sum_{(i, d_i - i) \in A_k} 2^{-j_{k,0} - k(i - i_{k,0})} p_{i,d_i} X^{i-i_{k,0}} \\ &= 2^{-j_{k,0}} \sum_{(i, d_i - i) \in A_k} p_{i,d_i} \left(\frac{X}{2^k}\right)^{i-i_{k,0}} \\ &= 2^{-j_{k,0}} C_k \left(\frac{X}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\hat{\gamma}_{k,\nu}$ est racine de $\hat{C}_k(X)$ si et seulement si $\gamma_{k,\nu} = 2^{-k} \hat{\gamma}_{k,\nu}$ est racine de $C_k(X)$. Ce qui implique que si $\Gamma_{k,\nu}$ est une k -caractéristique de L alors $\hat{\Gamma}_{k,\nu} = \frac{\Gamma_{k,\nu}}{2}$ est une k -caractéristique de \hat{L} , car

$$\hat{\Gamma}_{k,\nu} = |\hat{\gamma}_{k,\nu}|^{-\frac{1}{k}} = |2^k \gamma_{k,\nu}|^{-\frac{1}{k}} = \frac{\Gamma_{k,\nu}}{2}.$$

Considérons l'arête A_k de pente k positive. D'après la construction de $\mathcal{Q}^+(\hat{L})$ tout sommet de quadrant sur cette arête a des coordonnées de la forme $(i, i - d_i)$ et correspond au monôme $(-1)^{i+1} 2^{i-d_i} p_{i,d_i} z^{i-d_i} z^i \partial_z^i$. Le polynôme caractéristique associé à A_k est cette fois

$$\begin{aligned} \hat{C}_k(X) &= \sum_{(i, i - d_i) \in A_k} (-1)^{i+1} 2^{i-d_i} p_{i,d_i} X^{i-i_{k,0}} \\ &= \sum_{(i, i - d_i) \in A_k} (-1)^{i_{k,0}+1} (-1)^{i-i_{k,0}} 2^{j_{k,0}+k(i-i_{k,0})} p_{i,d_i} X^{i-i_{k,0}} \\ &= (-1)^{i_{k,0}+1} 2^{j_{k,0}} \sum_{(i, i - d_i) \in A_k} p_{i,d_i} \left(-2^k X\right)^{i-i_{k,0}} \\ &= (-1)^{i_{k,0}+1} 2^{j_{k,0}} C_{-k} \left(-2^k X\right). \end{aligned}$$

Donc si $\Gamma_{-k,\nu}$ est une $(-k)$ -caractéristique de L alors $\hat{\Gamma}_{k,\nu} = \frac{2}{\Gamma_{-k,\nu}}$ est une k -caractéristique de \hat{L} , car

$$\hat{\Gamma}_{k,\nu} = |\hat{\gamma}_{k,\nu}|^{-\frac{1}{k}} = |-2^{-k} \gamma_{-k,\nu}|^{-\frac{1}{k}} = \frac{2}{\Gamma_{-k,\nu}}.$$

5.4 Polygone de Newton-Chebyshev

De plus, avec une numérotation adéquate :

$$\hat{\Gamma}_{-k,\nu} = \frac{1}{\hat{\Gamma}_{k,\nu}}$$

ce qui redémontre la proposition 41.

L'arête A_∞ , si elle existe, est engendrée par le monôme

$$p_r \left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2} \right) (z^2 - 1)^{q-1} (2z^2)^r \partial_z^r.$$

On peut remarquer que l'arête A_∞ est réduite à un point si et seulement si le facteur de ∂_z^r est réduit à un monôme en z *i.e* si et seulement si $r = 1$ et p_r est un polynôme constant. Dans le cas contraire et d'après la définition que nous avons donnée le polygone caractéristique relatif à la pente infinie est

$$\hat{C}_\infty(X) = X^{d_r} p_r \left(\frac{X + X^{-1}}{2} \right) (X^2 - 1)^{q-1}.$$

Les racines de ce polynôme sont

$$\{-1, 1\} \cup \left\{ \gamma_{q,k}, \frac{1}{\gamma_{q,k}}, k = 1..q \right\}$$

où $\gamma_{q,k}$ racine de $X^2 - 2\alpha_{q,k}X + 1 = 0$ avec $\alpha_{q,k}$ racines de p_r . Les ∞ -caractéristiques sont donc

$$\{1\} \cup \left\{ |\gamma_{q,k}|, \frac{1}{|\gamma_{q,k}|}, k = 1..q \right\}$$

et nous retrouvons le fait que même pour l'ordre Gevrey 0 les ordres Gevrey précisés possibles sont couplés sous la forme $(0, A)$ et $(0, \frac{1}{A})$.

Résumons tous ces résultats par le théorème suivant :

Théorème 9

Soit $L \in \mathbb{C}[x][\frac{d}{dx}]$ et soit $\hat{L} \in \mathbb{C}(z)[\frac{d}{dz}]$ obtenu par le changement de variable $x = \frac{z+z^{-1}}{2}$ dans L .

Alors

- $\mathcal{Q}^-(\hat{L}) = (0, 2(2q-1)) + \mathcal{Q}^-(L)$.
- si $C_k(X)$ (respectivement $\hat{C}_k(X)$) est un polynôme caractéristique associé à la pente k finie, strictement négative, de $\mathcal{Q}^-(L)$ (resp. $\mathcal{Q}^-(\hat{L})$) alors $\hat{C}_k(X) = C^{te}.C_k(X/2^k)$.
- $\mathcal{Q}^+(\hat{L}) = \text{sym}(\mathcal{Q}^-(L))$.
- si $C_{-k}(X)$ (respectivement $\hat{C}_k(X)$) est un polynôme caractéristique associé à la pente $-k$ strictement négative (resp. k strictement positive) de $\mathcal{Q}^-(L)$ (resp. $\mathcal{Q}^+(\hat{L})$) alors $\hat{C}_k(X) = C^{te}.C_{-k}(-2^k X)$.
- si l'arête verticale de $\mathcal{Q}(\hat{L})$ existe alors

$$\hat{C}_\infty(X) = X^{d_r} p_r \left(\frac{X + X^{-1}}{2} \right) (X^2 - 1)^{q-1}.$$

5.4.3 Définition du polygone de Newton-Chebyshev

Du fait des propriétés de symétrie mises en évidence, nous voyons que l'ordre Gevrey précisé des solutions formelles de Chebyshev peut se lire sur le seul polygone de Newton $\mathcal{Q}^-(L)$. Cela nous amène à poser les définitions suivantes

Définition 17

- Nous appellenons polygone de Newton-Chebyshev de l'opérateur différentiel L et nous notons $\check{C}(L)$ le polygone de Newton à l'infini de L , i.e $\mathcal{Q}^-(L)$.
- Les équations caractéristiques relatives à $\check{C}(L)$ sont les équations caractéristiques de $\mathcal{Q}^-(L)$, notées $C_k(X)$.
- Si k est une pente finie non nulle de $\check{C}(L)$, on appelle k -caractéristiques les valeurs

$$\check{\Gamma}_{k,v} = \frac{|\gamma_{k,v}|^{-1/k}}{2}$$

où $\gamma_{k,v}$ est racine de $C_k(X)$.

- On pose $S_\infty = \{\alpha, \alpha \text{ racine de } X^2 - 2\beta X + 1 \text{ et } \beta \text{ racine de } C_\infty(X)\}$. On appelle ∞ -caractéristiques les valeurs

$$\check{\Gamma}_{\infty,v} = |\alpha_{\infty,v}| \text{ avec } \alpha_{\infty,v} \in S_\infty,$$

auxquelles on ajoute 1 si L est d'ordre strictement supérieur à 1.

Remarque : si A est une ∞ -caractéristique, il en est de même de $\frac{1}{A}$.

Moyennant ces définitions nous obtenons le théorème :

Théorème 10

5.5 Forme explicite de solutions formelles

Si la série de Chebyshev formelle $\hat{y} = \sum c_n T_n$ est solution formelle de l'équation différentielle

$$Ly = f$$

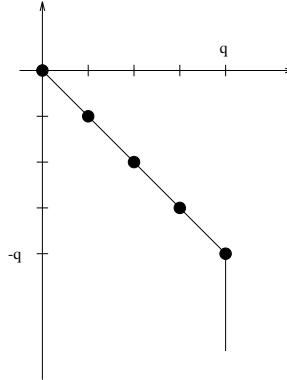
où L est un opérateur différentiel linéaire à coefficients polynomiaux et f un polynôme. Alors la série \hat{y} est

- soit convergente et $\{c_n\}$ est Gevrey d'ordre précis (s, A) avec $s = \frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes strictement négatives (finie ou non) de $\check{C}(L)$ et A l'une des k -caractéristiques.
- soit $\{c_n\}$ est Gevrey d'ordre précis (s, A) avec $s = -\frac{1}{k}$ où k est l'une des pentes strictement négatives (finie ou non) de $\check{C}(L)$ et $\frac{1}{A}$ l'une des k -caractéristiques.

Exemple 17 Revenons sur l'équation homogène à coefficients constants $Ly = 0$ avec

$$L = a_r \partial_x^r + \cdots + a_1 \partial_x + a_0$$

On suppose, toujours, que le polynôme $a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$ a r racines distinctes α_k , $k = 1 \cdots r$. Le polygone de Newton-Chebyshev de L est



avec $C_{-1}(X) = a_r x^r + \cdots + a_1 x + a_0$ et $C_\infty \equiv a_r$. Donc les ordres Gevrey précis possibles sont

$$(-1, \frac{\alpha_k}{2}) \text{ et } (1, \frac{2}{\alpha_k}), \quad k = 1 \cdots r$$

et correspondent bien aux comportements asymptotiques des $I_n(\alpha_k)$ et $K_n(\alpha_k)$ (voir les équivalences (5.10)). Il faut rajouter, si $r > 1$, l'ordre précis $(0, 1)$ qui ne correspond lui à aucune solution formelle.

5.5 Forme explicite de solutions formelles

Dans la section précédente nous avons cerné un peu la nature des solutions sur-numéraires de la récurrence de Chebyshev en indiquant leurs caractères Gevrey. Ce travail, quoique relativement technique, était *a priori* raisonnable à entreprendre du fait de l'existence des résultats puissants existant pour les développements asymptotiques Gevrey. Les résultats obtenus eussent pu à eux seuls nous satisfaire par l'éclairage qu'ils apportaient à notre interrogation initiale. Or nous avons pu établir un résultat supplémentaire qui a

dépassé nos espérances et qui rattache certaines solutions formelles à des fonctions solutions de l'équation différentielle génératrice de la récurrence de Chebyshev.

Commençons par un exemple. Soit a un réel strictement positif. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'K_n(a)T_n(x)$$

est une solution formelle divergente de l'équation $y' + ay = 0$. Nous savons donner le caractère Gevrey de cette solution formelle mais quelle est son lien avec la solution de l'équation différentielle ? L'intarissable Abramowitz nous livre la réponse avec la formule suivante

$$K_n(a) = \int_0^{\infty} e^{-a \cosh(x)} \cosh(nx) dx \quad [1, 9.6.24]$$

que, moyennant le changement de variable $t = \cosh(x)$ et le fait que $\cosh(n \operatorname{arccosh}(t)) = T_n(t)$, nous réécrivons

$$K_n(a) = \int_1^{\infty} e^{-at} \frac{T_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt.$$

Ainsi nous avons un lien entre $K_n(a)$ et e^{-ax} , c'est-à-dire un lien entre une solution formelle et une fonction solution de l'équation. Nous allons voir que ce résultat peut se généraliser pour une classe d'équations différentielles.

Nous désignons par \mathfrak{C} le plan complexe \mathbb{C} coupé le long de la demi-droite réelle $]-\infty, 1]$. Alors la fonction

$$R : z \mapsto \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

pour une certaine détermination de la racine, est une fonction analytique et uniforme sur \mathfrak{C} . De ce fait, si a et b sont deux points de \mathfrak{C} et si $\gamma(a, b)$ est un chemin orienté strictement contenu dans \mathfrak{C} joignant a à b , alors l'intégrale

$$\int_{\gamma(a, b)} f(z)R(z)dz \quad (5.14)$$

est définie pour toute fonction f analytique sur \mathbb{C} indépendamment du chemin d'intégration. En remarquant que la fonction R est majorée sur le disque de centre 1 et de rayon ρ par $\rho^{-1/2}$, on peut établir que l'intégrale (5.14) reste définie de manière unique pour un chemin issu du point $a = 1$. Maintenant nous voudrions pouvoir faire tendre b vers l'infini ou plus exactement puisque nous sommes dans le champ complexe faire tendre b vers l'infini dans une direction donnée. Pour cela, nous devons imposer des conditions sur la fonction f .

Définition 18

|| Pour un entier n et un nombre complexe ε de module 1, $\mathcal{S}(n, \varepsilon)$ désigne l'ensemble des fonctions f holomorphes sur \mathbb{C} pour lesquelles il existe deux réels positifs K et a tels que

$$|f^{(k)}(\varepsilon x)| \leq K e^{-ax} \quad \forall x > 0, k = 0 \cdots n.$$

La notation d_ε désigne la demi-droite issue de 0 passant par le complexe ε de module 1. La notation $\gamma(1, \varepsilon\infty)$ désigne un chemin de \mathfrak{C} issu de 1 et qui se confond avec une portion de d_ε pour aller à l'infini. Alors pour une fonction de $\mathcal{S}(n, \varepsilon)$, pour $n \geq 0$, l'intégrale

$$\int_1^{\varepsilon\infty} f(z)R(z)dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma(1, \varepsilon\infty)} f(z)R(z)dz \quad (5.15)$$

5.5 Forme explicite de solutions formelles

est définie indépendamment du chemin $\gamma(1, \varepsilon\infty)$. Comme il est clair que le produit d'une fonction de $\mathcal{S}(n, \varepsilon)$ par un polynôme est toujours dans $\mathcal{S}(n, \varepsilon)$ nous pouvons donner la définition suivante.

Définition 19

Pour f fonction de $\mathcal{S}(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon \neq -1$, nous définissons

$$C_n^\varepsilon(f) = \int_1^{\varepsilon\infty} f(t) \frac{T_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt. \quad (5.16)$$

Pour une fonction de $\mathcal{S}(0, -1)$, nous définissons $C_n^{-1}(f)$ par $C_n^1(x \mapsto f(-x))$.

Le lien entre les définitions précédentes et les solutions formelles d'équations différentielles est donné par la

Proposition 43

L étant notre opérateur différentiel holomorphe générique, soit f une solution de l'équation $Ly = 0$. Supposons que f appartienne à $\mathcal{S}(r, \varepsilon)$. Alors

$$\mathcal{L}(C_n^\varepsilon(f)) = 0.$$

Ce qui revient à dire que la série $\sum' C_n^\varepsilon(f) T_n$ est une solution formelle de l'équation $Ly = 0$.

Démonstration :

La fonction f appartient à $\mathcal{S}(r, \varepsilon)$, il est facile de voir que xf y appartient aussi. Il vient alors

$$C_n^\varepsilon(xf) = \int_1^{\varepsilon\infty} f(t) \frac{tT_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \int_1^{\varepsilon\infty} f(t) \frac{X_0(T_n(t))}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = X_0(C_n^\varepsilon(f)).$$

Nous montrerons plus bas la relation

$$\int_1^x \frac{T_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = -\frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}}. \quad (5.17)$$

Admettons la pour le moment et procérons à une intégration par parties

$$C_n^\varepsilon(f) = \left[f(x) \int_1^x \frac{T_n(t)}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \right]_1^\infty + \int_1^\infty f'(x) \frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \Delta(C_n^\varepsilon(f')).$$

Ainsi, f vérifiant l'équation homogène $Ly = 0$, nous avons

$$0 = C_n^\varepsilon \left(\sum_{k=0}^r p_k(x) f^{(k)} \right) = \sum_{k=0}^r p_k(X_0) C_n^\varepsilon \left(f^{(k)} \right) = \sum_{k=0}^r p_k(X_0) \Delta^{(r-k)} C_n^\varepsilon \left(f^{(r)} \right).$$

En appliquant Δ^r à l'avant dernière ligne, comme $\Delta^r C_n^\varepsilon(f^{(r)}) = C_n^\varepsilon(f)$ nous obtenons

$$\sum_{k=0}^r \Delta^r p_k(X_0) \Delta^{r-k} C_n^\varepsilon \left(f^{(r)} \right) = \sum_{k=0}^r p_k(X_r) \Delta^{r-k} C_n^\varepsilon(f) = \mathcal{L}(C_n^\varepsilon(f)) = 0.$$

Montrons la relation (5.17)

$$\frac{d}{dx} \frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{(x^2 - 1)\Delta(T_n'(x)) - x\Delta(T_n(x))}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

En utilisant la relation de structure et la récurrence à trois termes, nous établissons que

$$(x^2 - 1)T'_n - xT_n = \frac{(n-1)T_{n+1} - (n+1)T_{n-1}}{2}$$

et en appliquant l'opérateur Δ il vient

$$\Delta((x^2 - 1)T'_n - xT_n) = -\frac{T_{n+2} + T_{n-2}}{4} = (I - X_0^2)T_n = (1 - x^2)T_n.$$

Nous avons donc

$$-\frac{d}{dx} \frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{T_n(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Par ailleurs nous savons que les polynômes T_n et T_m ont les mêmes valeurs en -1 et 1 si n et m sont de même parité. Donc pour tout n , $T_{n+1} - T_{n-1}$ est un polynôme nul en -1 et 1 , de sorte que

$$\frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}} = A_n(x)\sqrt{x^2 - 1}$$

avec $A_n(x)$ polynôme. Ainsi $\frac{\Delta(T_n(x))}{\sqrt{x^2 - 1}}$ se prolonge par la valeur 0 en $x = 1$, ce qui justifie l'intégrale (5.17) et conclut la démonstration. \square

Exemple 18 Considérons l'équation différentielle $y' + x^2y = 0$ dont les solutions sont proportionnelles à $\sigma(x) = e^{-x^3}$. Il est facile de constater que la fonction σ est à décroissance exponentielle dans les trois secteurs (voir figure 5.2)

$$\left\{ z \mid -\frac{\pi}{6} < \arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\}, \left\{ z \mid \frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{5\pi}{6} \right\} \text{ et } \left\{ z \mid -\frac{5\pi}{6} < \arg(z) < -\frac{\pi}{2} \right\}.$$

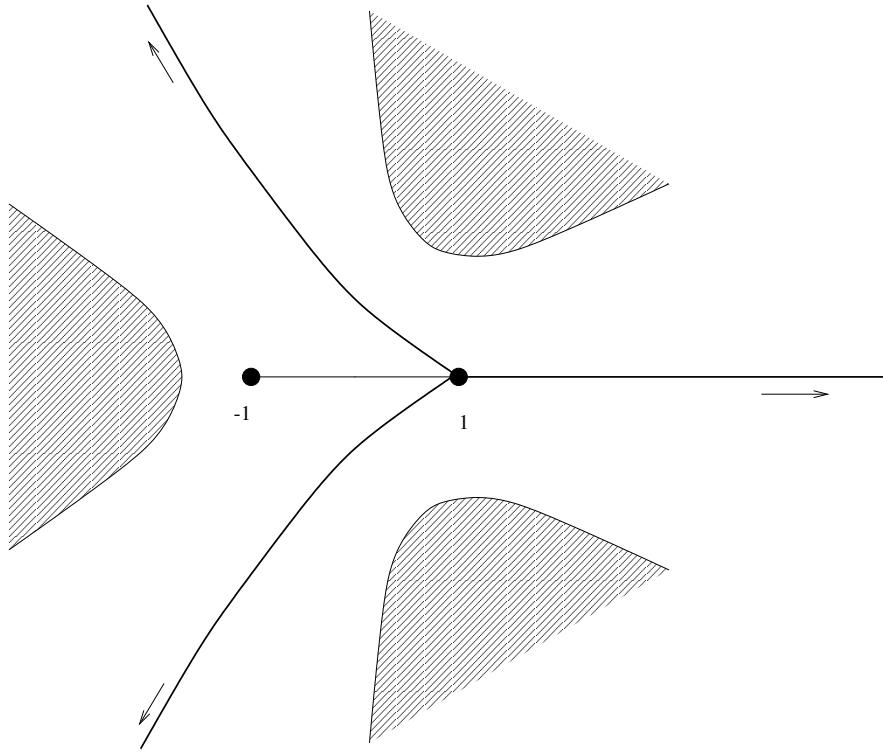
Il est assez facile de voir que 2 chemins dans le même secteur génère la même intégrale. En prenant un chemin d'intégration dans chaque secteur nous obtiendrons trois solutions formelles. En y ajoutant la série de Chebyshev de e^{-x^3} , nous avons 4 solutions pour la récurrence de Chebyshev associée dont l'espace des solutions est justement de dimension 4. Nous pouvons, sur cet exemple, évaluer numériquement les différentes intégrales et vérifier sur leurs conditions initiales qu'elles sont linéairement indépendantes. Ce qui résout dans ce cas entièrement la récurrence de Chebyshev.

Au-delà de l'exemple que nous venons de donner, nous avons des résultats qui permettent déterminer l'existence de zones de décroissance exponentielle pour des solutions d'une équation différentielle. Nous allons étudier le cas particulier où l'équation est du type

$$Ly = y^{(r)} + \sum_{k=0}^{r-1} p_k y^{(k)} = 0 \tag{5.18}$$

ce qui assure que les solutions de cette équation ne peuvent avoir de singularité qu'à l'infini. On sait depuis le siècle dernier (Fabry [23], Birkoff, Poincaré) que l'équation (5.18) admet une base de solutions formelles de la forme

$$e^{Q(t)} t^\lambda \sum_{i=1}^s \phi_i(t^{-1}) (\log t^{-1})^i \tag{5.19}$$


 FIG. 5.2 – Chemins d'intégration pour les solutions formelles correspondant à e^{-x^3} .

où $t^k = x$ avec k entier et où Q est un polynôme à coefficients complexes, λ un complexe, s un entier naturel non nul. Les ϕ_i sont des séries formelles en $1/t$ à coefficients complexes. L'algorithme de Newton issu des travaux de Fabry et repris et développé par Malgrange [44] permet de construire une base de solutions formelles du type (5.19). L'algorithme a été implémenté en Reduce dans le programme DESIR [19] puis la version Newton rationnel (Barkatou [3]) dans le programme DESIR2 en Maple [52]. En général les séries ϕ_i sont divergentes mais constituent les développements asymptotiques Gevrey de fonctions que l'on peut reconstruire grâce à la théorie de la multi-sommabilité issue des résultats de Ramis [55], Ecalle, Balser [2] etc. Nous reviendrons sur quelques uns des résultats de resommation dans la section suivante, mais cette théorie nous assure que la partie exponentielle $e^{Q(t)}$ quand elle est présente régit le comportement de la fonction solution de l'équation différentielle sous-jacente. La partie exponentielle existe pour au moins une solution formelle lorsque le point à l'infini est singulier irrégulier ce qui se voit sur le polygone de Newton complet de l'opérateur L . La détection des zones de décroissance exponentielle se fait alors simplement à partir du coefficient dominant du polynôme Q . Ainsi, si

$$Q(t) = at^n + \text{termes de degré inférieur}$$

l'exponentielle $e^{Q(t)}$ est alternativement exponentiellement croissante puis décroissante dans des secteurs suivant que la partie réelle de at^n est respectivement positive ou négative. Cette alternance de comportement est connue sous le nom de phénomène de Stockes. Nous voyons d'ailleurs que plus le degré de Q est élevé plus le nombre de secteurs de décroissance sont nombreux. Ce degré est corrélé aux degrés des polynômes p_k dans l'opérateur L ,

qui eux-mêmes influencent dans le sens croissant le nombre de solutions formelles. Nous pensons, bien que nous ne l'ayons pas établi rigoureusement, qu'une étude plus fine du polygone de Newton complet de L - au moins dans le cas restreint d'une équation du type (5.18) - peut nous donner suffisamment de secteurs de décroissance pour inclure toutes les solutions formelles de Chebyshev surnuméraires. Il est même probable que nous trouvions trop de secteurs donc une redondance de solutions. M. Barkatou a observé ce phénomène dans la recherche de solutions d'équations aux différences *via* des intégrales de Mellin. Le bon nombre de solutions est retrouvé alors en définissant des classes d'équivalence qui apparaissent naturellement dans l'emploi de l'algorithme de Newton rationnel. La même démarche pourrait nous permettre d'obtenir aussi le bon nombre de classes de solutions générées par les intégrales (5.16).

Bien que cette section s'achève sur plusieurs questions en suspens, les résultats qui y sont présentés éludent plus nettement la nature des solutions formelles que l'analyse Gevrey présentée auparavant.

5.6 Resommation de séries de Chebyshev

Cette section va traiter de la resommation de séries de Chebyshev et non de la resommation des séries de Chebyshev. En effet, nous n'allons pas présenter une théorie spécifique de la resommation dans le cas des séries de Chebyshev comme il en existe une dans le cas des séries de Taylor. Nous allons proposer des exemples et des pistes. Les méthodes pour resommer certaines séries de Chebyshev utilisent des outils généraux de resommation et non un outil spécialement adapté, au sens où le couple transformée de Laplace-transformée de Borel formelle est adapté à la resommation des séries de Taylor.

5.6.1 Resommation par prolongement analytique

La récurrence vérifiée par les coefficients de Chebyshev d'une fraction rationnelle génère des solutions formelles divergentes que nous avons explicitées. La convergence des coefficients sus-mentionnés est géométrique donc Gevrey 0, ce n'est donc pas une suite très rapidement convergente ; la contrepartie est que les solutions formelles associées ne sont pas très divergentes. Cela va nous permettre que les sommer avec des moyens très élémentaires. Partons de la série de Chebyshev

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a^n T_n(x)$$

qui est d'après l'exemple vu en début de chapitre solution formelle de l'équation

$$\left(\frac{a + a^{-1}}{2} - x \right) y = \frac{a^{-1} - a}{4}. \quad (5.20)$$

Oublions momentanément le "prime" de la série et nous posons $x = w(z)$. Nous avons alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n T_n \left(\frac{z + z^{-1}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - az} + \frac{1}{1 - az^{-1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{a} - \frac{z+z^{-1}}{2}}{\frac{a+a^{-1}}{2} - \frac{z+z^{-1}}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{a} - x}{\frac{a+a^{-1}}{2} - x} .
 \end{aligned}$$

La resommation apparaît dans le passage de la deuxième à la troisième ligne où nous avons remplacer les séries éventuellement divergentes selon les valeurs de z par le prolongements de leur somme au-delà de leurs régions de convergence respectives (*i.e.* $|z| < |a|^{-1}$ pour la première et $|z| > |a|$ pour la seconde). En rajoutant le "prime", nous obtenons donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a^n T_n(x) = \frac{\frac{a^{-1}-a}{4}}{\frac{a+a^{-1}}{2} - x} . \quad (5.21)$$

Si le module de a est strictement inférieur à 1 la série est bien la série de Chebyshev convergente de la fraction au second membre. Dans le cas contraire, nous avons resommé la série qui était divergente en une fonction qui est, au signe près, solution de l'équation (5.20).

Si nous changeons a en a^{-1} dans (5.21) nous ne ferons que changer le signe du second membre. Donc si nous posons $y = (a + a^{-1})/2$ et que nous faisons la demi-somme des seconds membres de l'égalité (5.21) pour respectivement a et a^{-1} nous obtenons, moyennant une propriété maintes fois utilisées dans ce document, que la série (sommée avec le même procédé!)

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'T_n(y) T_n(x) \quad (5.22)$$

est nulle pour tout x différent de y . Nous faisons cette dernière restriction car pour $x = y$ le dénominateur de la fraction rationnelle au second membre de (5.21) est nul. D'ailleurs, dans le cas où $x = y$ on peut vérifier que la série (5.22) tend vers l'infini. Ce résultat peut paraître étrange mais il est assez cohérent comme nous allons le voir de deux manières différentes.

D'abord considérons (5.22) comme une série de Chebyshev formelle, au sens défini dans ce chapitre, de la variable x . Effectuons formellement le produit de cette série avec le polynôme $x - y$; cela revient à appliquer l'opérateur $X_0 - yI$ aux coefficients de la série, à savoir $T_n(y)$. Nous obtenons

$$(x - y) \sum_{n=0}^{\infty} {}'T_n(y) T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \underbrace{\frac{1}{2} (T_{n+1}(y) - 2yT_n(y) + T_{n-1}(y))}_{0} T_n(x) = 0 \quad (5.23)$$

puisque nous avons reconnu la récurrence à trois termes pour $T_n(y)$. Ce qui tendrait à signifier que la série est nulle quand $x - y$ ne l'est pas.

D'autre part, la série (5.22) peut être interprétée comme le passage à la limite, si elle existait, $K(x, y)$ des noyaux polynomiaux

$$K_m(x, y) = \sum_{n=0}^m {}'T_n(y)T_n(x),$$

qui sont explicitées par la fameuse formule de Darboux-Christoffel :

$$K_m(x, y) = \frac{T_{m+1}(x)T_m(y) - T_m(x)T_{m+1}(y)}{2(x - y)}.$$

Ces noyaux ont la propriété suivante : pour toute fonction f de $L_w^2[-1, 1]$, avec $w(y) = (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, on a

$$s_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(y)K_n(\cdot, y)w(y)dy.$$

Ainsi en passant à la limite on est tenté d'écrire

$$f = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 f(y)K(\cdot, y)w(y)dy$$

et donc d'identifier la série (5.22) à la fonction de Dirac δ_{x-y} , ce qui serait consistant avec une valeur nulle pour $x \neq y$ et infinie pour $x = y$. Si l'on se rappelle le lien entre polynômes de Chebyshev et polynôme trigonométrique, cette interprétation très intuitive de la série (5.22) est cohérente avec le développement de la fonction δ en série de Fourier dans la théorie des distributions, développement que l'on peut voir comme le passage à la limite du noyau de Dirichlet.

5.6.2 Resommation par le procédé de Borel-Laplace

Nous avons introduit la notion de séries de Chebyshev solutions formelles d'équations différentielles en nous inspirant de celle plus connue des séries de Taylor formelles et avec l'idée de tirer de la théorie très aboutie sur ces dernières, des éléments pour une ébauche de théorie dans le cas Chebyshev. La première partie de ce chapitre a déjà largement fait usage de cette théorie à travers les résultats de Ramis sur le comportement Gevrey des solutions formelles. Une grande différence est à mettre en exergue d'ores et déjà entre les deux cas : les séries de Taylor divergentes (sous entendu à rayon de convergence nul) n'apparaissent que lorsqu'elles sont centrées sur un point singulier ; alors que des solutions formelles de Chebyshev divergentes apparaissent pour une équation ordinaire au voisinage de tout le segment de définition de la série (classiquement $[-1, 1]$). Le grand résultat de la théorie des séries de Taylor formelles dans ces développements les plus récents, est de montrer que toute solution formelle d'une équation différentielle holonome (et même plus largement à coefficients méromorphes) peut se "réincarner", pour reprendre un terme de Ramis, en une fonction solution de l'équation dont la série formelle sera le développement asymptotique dans un secteur du plan complexe issu du point singulier. convenablement choisi

Premier exemple

Resommons maintenant la série étudiée précédemment

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'a^n T_n(x)$$

par le procédé de Borel-Laplace. Effectuons la transformée de Borel sur la série, qui sera alors convergente en tout point de \mathbb{C} puisque nous partons de coefficients Gevrey 0 et non Gevrey 1, et effectuons les calculs suivants où \Re représente la partie réelle :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} {}'a^n T_n(x) t^n &= \Re \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{in \arccos(x)}}{n!} t^n \right) \\ &= \Re \left(e^{at e^{i \arccos(x)}} \right) - \frac{1}{2} \\ &= e^{atx} \cos(at \sqrt{1-x^2}) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

D'après la formule 3.893 (2) dans l'ouvrage de Gradshteyn et Ryzhik [30], nous avons l'égalité

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} \cos(vt) dt = \frac{u}{u^2 + v^2} \quad (u > 0)$$

qui appliquée à notre cas donne, pour $a < 0$ et tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-t} e^{atx} \cos(at \sqrt{1-x^2}) dt &= \frac{1-ax}{(1-ax)^2 + (a\sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \frac{1-ax}{1+a^2-2ax} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^{-1}-x}{\frac{a^{-1}+a}{2}-x}. \end{aligned}$$

Finalement, nous trouvons

$$\int_0^{\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n T_n(x)}{n!} t^n \right) dt = \frac{\frac{a^{-1}-a}{4}}{\frac{a^{-1}+a}{2}-x}$$

ce qui corrobore le résultat donné par la méthode de prolongement.

Second exemple

Le second exemple étudie le cas d'une série d'ordre Gevrey 1, pour laquelle la méthode de prolongement de peut s'appliquer puisque la série est divergente partout. Nous avons montré dans un chapitre précédent que la série de Chebyshev

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n-1)! T_n(x),$$

qui est le pendant de la série d'Euler, est solution formelle de l'équation différentielle

$$x(1-x^2)y'' - (1+2x-2x^3)y' + (1+x)y = -x^2.$$

Appliquons le procédé de Borel-Laplace à cette série et montrons que le résultat obtenu est bien solution de l'équation différentielle. Commençons par effectuer la transformation de Borel que nous prolongeons

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)! T_n(x) t^n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n T_n(x) t^n}{n} \\
 &= -\Re \left(\ln \left(1 + te^{i \arccos(x)} \right) \right) \\
 &= -\ln \left(\sqrt{1 + 2xt + t^2} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \ln(1 + 2xt + t^2) .
 \end{aligned}$$

Effectuons la transformée de Laplace sur ce résultat

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)! T_n(x) t^n}{n!} \right) dt &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1 + 2xt + t^2) dt \\
 &= -\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{x+t}{1+2xt+t^2} dt .
 \end{aligned}$$

La somme de notre série de Chebyshev divergente est donc

$$u(x) = -\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{x+t}{1+2xt+t^2} dt .$$

Nous devons montrer que $u(x)$ est solution de l'équation différentielle vérifiée formellement par la série de Chebyshev. Intègrons par parties

$$\begin{aligned}
 -u(x) &= \left[-e^{-t} \frac{x+t}{1+2xt+t^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) \left(-\frac{1+2x^2+2xt+t^2}{(1+2xt+t^2)^2} \right) dt \\
 &= x - \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{-1+2x^2+2xt+t^2}{(1+2xt+t^2)^2} dt .
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la dérivée de u est

$$u'(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(1 + 2xt + t^2) dt = -\int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t}{1+2xt+t^2} dt .$$

En intégrant par parties la dernière intégrale, il vient

$$u'(x) = -\underbrace{\left[-(t+1)e^{-t} \frac{1}{1+2xt+t^2} \right]_0^{\infty}}_1 + \int_0^{\infty} (t+1)e^{-t} \frac{2(x+t)}{(1+2xt+t^2)^2} dt .$$

Enfin, nous avons pour la dérivée seconde

$$u''(x) = -\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t}{1+2xt+t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{2t^2}{(1+2xt+t^2)^2} dt .$$

En combinant les divers résultats obtenus plus haut, nous obtenons donc

$$x(1-x^2)u'' - (1+2x-2x^3)u' + (1+x)u = -x^2 - x + \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{R(t,x)}{(1+2xt+t^2)^2} dt$$

5.7 Conclusion

avec

$$\begin{aligned} R(t, x) &= x(1 - x^2)2t^2 - (1 + 2x - 2x^3)(t^2 - 1) + (1 + x)(-1 + 2x^2 + 2xt + t^2) \\ &= x(t + 1)(t + 2x + 1). \end{aligned}$$

Remarquons que

$$(t + 1)(t + 2x + 1) = 1 + 2xt + t^2 + 2(x + t)$$

et donc que

$$\begin{aligned} \frac{(t + 1)(t + 2x + 1)}{(1 + 2xt + t^2)^2} &= \frac{1}{1 + 2xt + t^2} + \frac{2(x + t)}{1 + 2xt + t^2} \\ &= \frac{1}{1 + 2xt + t^2} - \frac{t}{dt} \left(\frac{2(x + t)}{1 + 2xt + t^2} \right). \end{aligned}$$

Une dernière intégration par parties nous donne la formule (valable sous condition d'existence des intégrales, existence assurée dans notre cas)

$$\int_0^\infty e^{-t}(u(t) - u'(t))dt = -[e^{-t}u(t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}u(t)dt = u(0). \quad (5.24)$$

En utilisant cette formule, il vient

$$\int_0^\infty e^{-t} \frac{(t + 1)(t + 2x + 1)}{(1 + 2xt + t^2)^2} dt = 1 \quad \text{donc} \quad \int_0^\infty e^{-t} \frac{R(t, x)}{(1 + 2xt + t^2)^2} dt = x,$$

d'où nous déduisons que

$$x(1 - x^2)u'' - (1 + 2x - 2x^3)u' + (1 + x)u = -x^2$$

ce que nous voulions montrer.

On sait depuis longtemps, et notamment depuis les travaux de Stieljes, donner un sens à la série divergente d'Euler. En particulier en lui appliquant le procédé de Borel-Lebesgue nous trouvons

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n-1)! z^n \sim \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{z}}}{1+t} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\frac{1}{z}+t} dt$$

où le symbole \sim indique autant la somme au sens du procédé de Borel-Laplace que la notion de développement asymptotique Gevrey [56]. Or, en posant $x = w(z)$, nous calculons

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\frac{1}{z}+t} dt + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{z+t} dt \right) = \int_0^\infty e^{-t} \frac{t + (z + \frac{1}{z})/2}{1 + (z + \frac{1}{z}) t + t^2} dt = u(x) \quad (5.25)$$

Ainsi la transformation $x = w(z)$ qui relie les séries formelles d'Euler et d'Euler-Chebyshev, relie aussi leurs sommes respectives obtenues par le procédé de Borel-Laplace. Cela nous indique un moyen général pour resommer une série de Chebyshev en resommant la série de Taylor correspondant et en effectuant la substitution $x = w(z)$ sur la somme obtenue.

5.7 Conclusion

L'existence de séries de Chebyshev solutions formelles d'une équation différentielle, pourtant sans singularité sur l'intervalle $[-1, 1]$, est un phénomène surprenant qui tranche radicalement avec le cas des séries de Taylor. Les résultats donnés dans ce chapitre répondent en partie aux interrogations suscitées par ce phénomène.

Chapitre 6

Application à la résolution numérique des équations différentielles

Nous avons vu précédemment que les séries de Chebyshev permettent de représenter et de produire des approximations polynomiales quasi optimales des solutions d'une équation différentielle holonome. Nous avons aussi présenté des méthodes et des outils informatiques pour manipuler les séries orthogonales, de Chebyshev en particulier. Il est alors naturel d'étudier les moyens de calculer (au moins de manière approchée) les séries de Chebyshev solutions de problèmes différentiels à l'aide de nos outils. La première méthode que nous avons étudiée découle d'une façon très naturelle de l'équation récurrente vérifiée par les coefficients cherchés. Après l'avoir en quelque sorte identifiée nous utiliserons cette méthode dans diverses applications. Les problèmes différentiels que nous considérons, construits autour d'une équation holonome, sont de la forme

$$\begin{cases} C_i y = \gamma_k & i = 1 \dots r \\ Ly = \sum_{k=0}^r p_k(x) y^{(k)} = q \end{cases} \quad (6.1)$$

où la première ligne du système représente des conditions supplémentaires du type

$$C_i y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{i,j} y^{(d_{i,j})}(x_{i,j}) = \gamma_i \quad k_i, d_{i,j} \in \mathbb{N}, \alpha_{i,j}, x_{i,j}, \gamma_i \in \mathbb{C}. \quad (6.2)$$

Ceci comprend en particulier les conditions initiales $C_i y = y^{(i-1)}(x_0)$ et les conditions aux limites classiques. Notre objectif est de résoudre ce problème sur un intervalle donné. Pour cela nous supposerons que les contraintes ajoutées à l'équation différentielle assure l'existence et l'unicité de la solution au problème (6.1).

6.1 Une méthode de résolution

Puisque nous sommes capables *via* une transformation linéaire de nous ramener à ce cas, nous allons présenter une méthode pour résoudre le problème (6.1) sur l'intervalle

$[-1, 1]$ avant de l'étendre à un segment arbitraire. Nous appellerons σ la solution (supposée existante et unique) du problème (6.1). Et nous supposerons que σ ne présente aucune singularité sur $[-1, 1]$. Une condition suffisante¹ pour cela étant que le polynôme p_r ne s'annule pas sur cet intervalle. Nous savons alors que σ admet un développement en série de Chebyshev

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n T_n$$

dont les coefficients c_n sont à décroissance géométrique et vérifient l'équation aux différences

$$\mathcal{L}(c_n) = q_n, \quad n \geq r. \quad (6.3)$$

Nous rappelons que l'opérateur \mathcal{L} construit par notre schéma général est de la forme

$$\mathcal{L} = \sum_{k=-e}^e l_k(n) E^k$$

où e est l'extension de la récurrence au sens donné par la définition 11 et où les l_k sont des fractions rationnelles. Les conditions supplémentaires qui apparaissent dans (6.1) imposent aussi des conditions sur les coefficients c_n , de la forme

$$C_i \sigma = \sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n C_i(T_n) = \gamma_i \quad (6.4)$$

Sous l'hypothèse que les points $x_{i,j}$ sont dans l'intervalle $[-1, 1]$, l'application de la proposition 20 nous montre aisément que les normes $\|C_i(T_n)\|_{[-1,1]}$ sont au plus à croissance polynomiale et que, par conséquent, la somme (6.4) est normalement convergente quel que soit i . Nous pouvons voir les choses de la façon suivante : les équations (6.3) et (6.4) constituent un système linéaire infini. Ordonnons ce système en prenant pour premières lignes les conditions (6.4) par ordre croissant de l'indice i , les lignes suivantes étant constituées des équations (6.3) dans l'ordre croissant de n . Nous écrivons alors ce système sous la forme matricielle

$$\mathbf{L}\mathbf{c} = \mathbf{q} \quad (6.5)$$

où \mathbf{c} est le vecteur des coefficients de Chebyshev de σ

$$\mathbf{c} = {}^t(c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$$

et \mathbf{q} est le vecteur

$$\mathbf{q} = {}^t(\gamma_0, \dots, \gamma_{r-1}, q_r, q_{r+1}, \dots).$$

La matrice \mathbf{L} est un peu délicate à décrire car il faut tenir compte de la convention sur les c_n d'indice négatif dans l'équation aux différences (6.3). Nous donnons la forme explicite des coefficients de $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_{i,j})_{i,j=0 \dots \infty}$ et nous nous empresserons de donner un exemple afin de clarifier les choses.

$$\mathbf{L}_{i,j} = \begin{cases} C_i(T_j) & i = 0 \dots r-1, \quad j = 0 \dots \infty \\ l_{j-i}(i) + l_{-j-i}(i) & i = q \dots e-1, \quad j = 0 \dots \infty \\ l_{j-i}(i) & i = e \dots \infty, \quad j = 0 \dots \infty \end{cases}$$

¹Condition non nécessaire comme le montre l'équation $xy' - 2y = 0$ où malgré la présence d'une singularité en 0 (singularité dite apparente pour la raison qui suit) toute solution (à savoir Kx^2) est régulière sur \mathbb{C} et donc a fortiori sur $[-1, 1]$.

6.1 Une méthode de résolution

Il est assez immédiat de vérifier qu'à partir de la e -ième ligne la matrice a une structure bande de largeur $2e + 1$ symétrique par rapport à la diagonale.

Exemple 19 L'équation $y' - y = 3x - 5$ avec la condition initiale $y(1) = 7$ se traduit par le système

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \frac{-1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2(m-1)} & 1 & \frac{1}{2(m-1)} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2m} & 1 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Bien sûr nous nous savons pas, en général, résoudre le système linéaire infini (6.5). Aussi pour approcher les $m + 1$ premiers coefficients de Chebyshev de σ allons nous appliquer une méthode qui peut paraître, au premier abord, un peu rudimentaire. Dans la mesure où nous savons que les coefficients cherchés sont à décroissance géométrique, nous négligeons ceux d'indices strictement supérieurs à m *i.e.* que nous les posons égaux à zéro dans le système (6.5). Il est assez immédiat de voir que cette opération transforme le système infini (6.5) en un système rectangulaire de dimensions $(m + 1 + e) \times (m + 1)$. Nous notons \mathbf{L}_m la matrice associée aux $m + 1$ premières lignes de ce système triangulaire (*i.e.* la sous-matrice principale de dimension $m + 1$ de \mathbf{L}) et \mathbf{T}_m la matrice associée aux e lignes restantes. La silhouette de la matrice rectangulaire est donnée en figure 6.1. On observera que cette matrice est une matrice bande (avec une largeur de bande $2e + 1$) bordée² par r lignes pleine. Cette structure particulière sera prise en compte pour la résolution du système. Nous considérons alors le système matriciel

$$\mathbf{L}_m \mathbf{x} = \mathbf{q}_m \quad (6.6)$$

Supposons ce système inversible, notons $\bar{\mathbf{c}}_m$ le vecteur solution et $\bar{c}_{m,n}$ la n -ième composante de celui-ci. Nous prenons comme approximation de la solution σ le polynôme de degré m

$$\sigma_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}' \bar{c}_{m,n} T_n(x) . \quad (6.7)$$

Pour que la résolution du système (6.6) prenne bien en compte toute la structure de l'équation différentielle nous supposons d'une part que $m > r + \deg(q)$ de sorte que le vecteur \mathbf{q}_m contienne tous les coefficients du polynôme second membre q ; d'autre part que $m > r + e$ de sorte que la matrice \mathbf{L}_m contient au moins une ligne représentant entièrement la récurrence de Chebyshev. Nous supposons m tel pour tout le reste du chapitre.

²Le lecteur nous pardonnera cet anglicisme relativement plaisant.

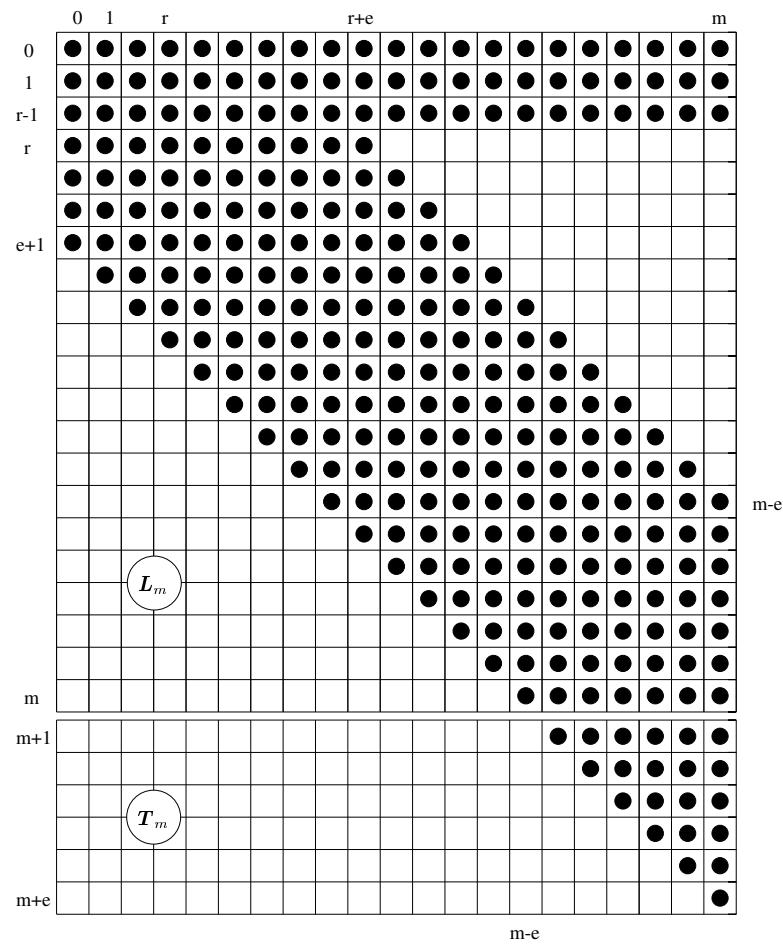


FIG. 6.1 – Silhouette de la matrice tronquée

6.1 Une méthode de résolution

La construction de la matrice \mathbf{L}_m est facile grâce aux procédures introduite dans le chapitre 2. Notamment avec la procédure `Opdiff-OS` nous générions la récurrence de Chebyshev donc la partie bande de matrice, la procédure `eval-OS` permet d'évaluer les conditions initiales et donc d'établir les r premières lignes de \mathbf{L}_m tandis qu'avec la procédure `Conversion-OSP` nous permet d'écrire le second membre q dans la base $T_n^{(r)}$.

Proposition 44

|| *L'approximant σ_m est solution de l'équation*

$$Ly = q + \sum_{k=1}^e \tau_k T_{m+k}^{(r)}$$

|| *où les τ_k sont des constantes.*

Démonstration :

D'après la structure de l'opérateur \mathcal{L} , il est facile de voir que $c_n = 0$ pour tout $n > m$ implique que $\mathcal{L}(c_n) = 0$ pour tout $n > m + e$. Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} L\sigma_m(x) &= \sum_{n=r}^{\infty} \mathcal{L}(\bar{c}_{m,n}) T_n^{(r)}(x) \\ &= \underbrace{\sum_{n=r}^m \mathcal{L}(\bar{c}_{m,n}) T_n^{(r)}(x)}_{q_n} + \sum_{n=m+1}^{m+e} \mathcal{L}(\bar{c}_{m,n}) T_n^{(r)}(x) \\ &= q(x) + \tau_1 T_{m+1}^{(r)}(x) + \cdots + \tau_e T_{m+e}^{(r)}(x) \end{aligned}$$

où chaque constante τ_n vaut $\mathcal{L}(\bar{c}_{m,n+m})$. □

Remarque 14 *On vérifie aisément que les coefficients τ_k s'expriment sous la forme matricielle*

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \vdots \\ \tau_e \end{pmatrix} = \mathbf{T}_m \bar{\mathbf{c}}_m$$

Les τ_k viennent en quelque sorte compenser l'oubli des e dernières lignes du système tronqué.

Il appart donc que la méthode de résolution présentée s'inscrit dans la famille des τ -méthodes de Lanczos dans le sens où l'approximant σ_m est la solution polynomiale exacte d'une perturbation polynomiale de l'équation différentielle originelle. Nous ferons plus bas un rappel sur les τ -méthodes et leurs diverses variantes.

Exemple 20 La fonction $f(x) = \exp\left(-\frac{3x}{7+x}\right)$ déjà vue dans l'exemple 4, est solution du problème

$$(7+x)^2 y' + 21y = 0, \quad y(0) = 1.$$

Si nous appliquons notre τ -méthode à ce problème, nous obtenons une approximation de f dont l'erreur est reportée dans la figure 6.2. On remarquera que l'approximant généré par la τ -méthode peut, dans ce cas particulier, être améliorée par addition d'une constante

(la demi-amplitude de l'erreur) ce qui correspond à l'adjonction d'une perturbation au niveau des conditions initiales. C'est un raffinement possible des τ -méthodes utilisé pour l'approximation de fonctions spéciales par exemples.

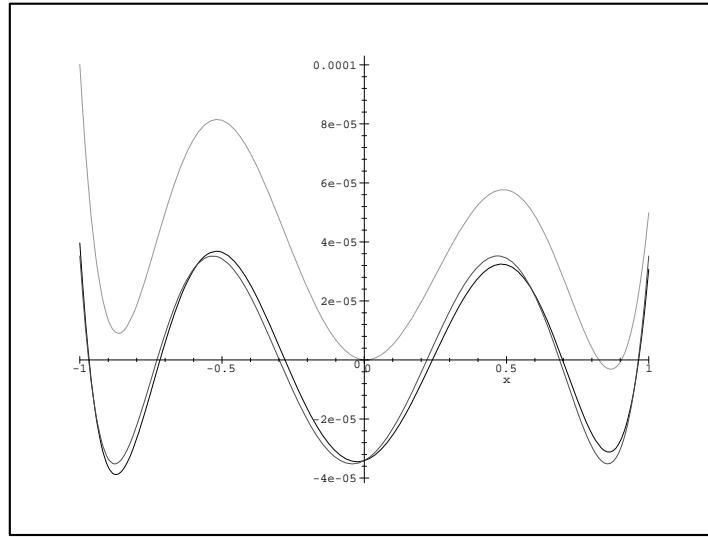


FIG. 6.2 – La courbe qui est située au dessus des deux autres est celle de l'erreur commise dans l'approximation de $\exp\left(-\frac{3x}{7+x}\right)$ par la solution de la τ -méthode. Les deux autres courbes, rappelées à titre de comparaison, sont celles de la figure 3.1 du chapitre 3.

Exemple 21 Retrouvons notre fonction-test $\sigma(x) = \frac{1}{b+x}$ solution de la pseudo-équation différentielle $(b+x)y = 1$. Le système linéaire associé est défini par

$$\mathbf{L}_m = \left[\begin{array}{cccccc} 2b & 2 & & & & & \\ 1 & 2b & 1 & & & & \\ & 1 & 2b & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & 1 & 2b & 1 & & \\ & & & 1 & 2b & & \\ & & & & 1 & 2b & \end{array} \right] \quad \mathbf{q}_m = \left[\begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

Nous avons donc affaire à une matrice presque Toeplitz et de toute manière inversible puisqu'à diagonale dominante sous l'hypothèse $|b| > 1$. Nous pouvons même expliciter l'approximant correspondant

$$\sigma_m(x) = \frac{1}{x+b} + (-1)^m \frac{T_{m+1}(x)}{(x+b)T_{m+1}(b)}$$

dont on peut vérifier qu'il s'agit bien d'un polynôme malgré les apparences (lors de la mise au même dénominateur $x + b$ se met en facteur au numérateur) et dont on voit qu'il converge uniformément vers $\frac{1}{x+b}$.

6.1.1 La τ -méthode de Lanczos

La τ -méthode, introduite par Lanczos [35, 36], est souvent présentée comme une philosophie que nous pouvons résumer ainsi : plutôt que de chercher une solution approchée d'un problème, cherchons une solution exacte d'une approximation du problème. A l'origine Lanczos utilise la τ -méthode pour la résolution d'équations différentielles holonomes par des polynômes. Lanczos considère un polynôme à coefficients indéterminés

$$b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

qu'il voudrait voir vérifier une équation différentielle holonome de la forme $Ly = q$. Les coefficients b_k doivent pour cela vérifier un système linéaire qui se trouve sur-déterminé. Cette indétermination est levée par adjonction d'une perturbation au second membre de la forme

$$\tau_1 V_{n+1} + \cdots + \tau_s V_{n+s}$$

où les τ_k sont des constantes (qui ont donné le nom de la méthode) et les V_k des polynômes. Lorsque que la solution est cherchée sur un domaine D , les V_n sont choisis de sorte à être minimaux sur D . En particulier, pour $D = [-1, 1]$ Lanczos utilise les polynômes de Chebyshev. Signalons que cette idée de minimisation a été utilisée plus récemment par Coleman [15, 14] pour des résolutions sur des domaines bidimensionnels du champ complexe avec des perturbations exprimées au moyen des polynômes de Faber *ad hoc*.

Une première façon de résoudre en pratique le système perturbé introduit par la τ -méthode a été donnée par Lanczos lui-même et largement étudiée et améliorée par Ortiz et son école [49, 50, 51]. Elle repose sur l'introduction des polynômes canoniques Q_m associés à l'opérateur différentiel L par les relations

$$LQ_m = x^m.$$

Une fois les polynômes canoniques calculés le problème perturbé se résout grâce à une combinaison de polynômes canoniques. Bien sûr, deux questions se posent : l'existence et l'unicité des Q_m d'une part et le coût du calcul des polynômes canoniques par rapport au problème initiale. Pour la première question, Ortiz [49] montre qu'ils existent de manière unique³ sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de m , ces anomalies devant d'ailleurs être prises en compte dans le calcul des solutions approchées. Sans entrer dans une description détaillée de la théorie des polynômes canoniques, nous dirons juste que les valeurs "singulières" de m correspondent au cas où notre matrice \mathbf{L}_m est éventuellement non-inversible. Le calcul des polynômes canoniques peut se faire de manière récursive, il ne s'agit donc pas de résoudre n équations différentielles quand il n'y en avait qu'une au départ. De plus, une fois les polynômes canoniques calculés, ils peuvent servir à résoudre l'équation différentielle à un ordre quelconque compatible avec le nombre de polynômes à disposition et avec des conditions initiales diverses. Dans la pratique néanmoins, Ortiz

³modulo les possibles solutions polynomiales de l'équation homogène $Ly = 0$

reconnaît la difficulté de programmation due aux valeurs singulières sus-mentionnées. Sur le plan théorique l'approche est très féconde. Nous y reviendrons.

Dans la mise en oeuvre de la τ -méthode, telle que nous venons de la présenter, n'apparaît pas clairement le lien entre la solution polynomiale calculée et la série de Chebyshev (dans le cas où la perturbation donnée par des polynômes de Chebyshev) de la solution exacte. D'autant plus que Lanczos et Ortiz travaillent avec des polynômes exprimés dans la base canonique $\{x^n\}$. Une autre approche met plus en avant ce lien. Elle consiste, comme nous l'avons fait, à travailler sur les récurrences vérifiées par les coefficients de Chebyshev (ou autres) de la solution. Cette approche a été celle de Clenshaw [12], Elliot [21] et Fox [25] dont nous avons vu dans un chapitre précédent les mécanismes de construction des récurrences. Le lien entre les deux approches a été vu et étudié par Fox [24] d'une part et par l'école d'Ortiz [20] d'autre part.

Plus récemment une nouvelle approche, dite “opérationnelle”, qui transpose les opérations différentielles en opérations matricielles agissant sur des vecteurs de coefficients, a été développée par Ortiz *et al.* (dans l'article [20] déjà cité) et par Coutias *et al.* [16]. Les derniers passent, comme Fox, à une reformulation en terme d'équation intégrale du problème différentiel initial.

Au bout du compte, chacune des méthodes présentées ci-dessus génère une solution polynomiale qui vérifie exactement l'équation originelle perturbée à l'aide de polynômes de Chebyshev ou de leurs dérivées. Ces solutions sont donc, lorsqu'elles ne sont pas égales, assez semblables vis-à-vis de la convergence comme nous allons le voir plus bas. La distinction majeure entre les diverses méthodes réside donc dans la facilité d'automatisation et d'extension qu'elles permettent. De ce point de vue nous pensons que notre méthode présente ces facilités.

6.1.2 Analyse d'erreur a posteriori

Notons $e_m(x)$ l'erreur d'approximation de la solution σ du problème (6.1) par la solution polynomiale de degré m produite par la τ -méthode dans l'une de ses formulations. Il est clair que $e_m(x)$ vérifie l'équation

$$Le_m = \tau_1 V_{m+1} + \cdots + \tau_s V_{m+s}.$$

Si l'on connaît un système fondamental des solutions de l'équation homogène $Ly = 0$, on peut déduire, après calcul des τ_k , une majoration de e_m . Ce procédé a été largement utilisé pour l'établissement de tables de valeurs de fonctions spéciales holonomes (c'est-à-dire une très large partie des fonctions spéciales) par Clenshaw, Luke [43] et bien d'autres.

6.1.3 Convergence

Dans leurs différentes formulations les τ -méthodes ont été étudiées du point de vue de la convergence. L’“équivalence” entre les différentes méthodes présentées plus haut et celle que nous avons introduite permet d'appliquer les résultats des premières à cette dernière. En particulier, dans le cas de l'approche par les polynômes canoniques, M.R. Crisci et E.L. Ortiz [17] ont démontré la convergence de la τ -méthode pour les équations différentielles. Nous soulignons, à ce niveau de l'exposé, que malgré la condescendance qui a pu transparaître chez certains auteurs vis-à-vis de l'approche par les polynômes canoniques et de l'école d'Ortiz, celle-ci produit de nombreux résultats fondamentaux sur

6.1 Une méthode de résolution

les τ -méthodes et nous ajouterons que nous y avons trouvé la seule démonstration claire et générale de convergence pour les équations différentielles. Fort d'un résultat existant, nous pourrions passer à la suite. Néanmoins, puisque nous apportons une approche nouvelle, nous allons introduire des outils spécifiques à cette approche pour l'étude de la convergence.

Notons \mathbf{c}_m^{ex} le vecteur composé des $m + 1$ premiers coefficients (exacts) de Chebyshev de la solution σ . Définissons

$$\mathbf{u}_m = \mathbf{q}_m - \mathbf{L}_m \mathbf{c}_m^{\text{ex}}$$

D'après la manière dont nous avons construit la matrice \mathbf{L}_m et le vecteur \mathbf{q}_m , il est assez immédiat de voir que les composantes du vecteur \mathbf{u}_m sont (en posant $i_m = m - e + 1$)

$$(\mathbf{u}_m)_i = \begin{cases} \sum_{n=m+1}^{\infty} C_i(T_n) c_n & , 0 \leq i \leq r-1 \\ 0 & , r \leq i \leq m-e \\ \sum_{k=e-j}^e l_k(i) c_{m+k} & , i_m \leq i \leq m \quad \text{avec } j = i - i_m \end{cases}$$

Nous allons majorer la norme du vecteur \mathbf{u}_m . Pour cela nous disposons de plusieurs informations. D'une part, si ρ^* est la vitesse de convergence des séries de Chebyshev partielles de la solution σ , nous savons qu'alors pour tout ρ strictement inférieur à ρ^* nous avons la majoration $|c_n| < M \rho^{-n}$. Par ailleurs nous avons vu que les valeurs $|C_i(T_n)|$ sont majorées par un polynôme en n que nous noterons $P_i(n)$. Il vient alors

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} C_i(T_n) c_n \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |P_i(n)| \frac{M}{\rho^n} \quad (6.8)$$

Pour continuer nous établissons le lemme

Lemme 9

Soient α un réel strictement supérieur à 1 et P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[x]$. Alors pour tout réel β tel que $1 < \beta < \alpha$ il existe une constante B telle que

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P(n)}{\alpha^n} \right| \leq \frac{B}{\beta^m}$$

Démonstration :

Supposons que P soit un polynôme à coefficients réels positifs. Nous avons alors la propriété suivante

$$\exists B_1 > 0, \forall n, m \geq 1 \quad P(n+m) \leq B_1 P(n) P(m)$$

que l'on montre en la vérifiant pour les monômes x^k et en utilisant des majorations simples. Alors (en remarquant que pour $x > 0$, $|P(x)| = P(x)$)

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P(n)}{\alpha^n} \right| \leq \frac{1}{\beta^m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n+m)}{(\alpha/\beta)^m \alpha^n} \leq \frac{1}{\beta^m} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P(n)}{\alpha^n} \frac{B_1 P(m)}{(\alpha/\beta)^m} \right).$$

Or il existe une constante $B_2 > 0$ telle que

$$\forall m \geq 1 \quad \frac{B_1 P(m)}{(\alpha/\beta)^m} \leq B_2$$

puisque la quantité à gauche dans l'inégalité tend vers 0. Comme, de plus, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(n)}{\alpha^n}$$

est convergente et à termes positifs, donc majorée par une constante $B_3 > 0$. Ainsi

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P(n)}{\alpha^n} \right| \leq \frac{1}{\beta^m} \underbrace{B_2 B_3}_B$$

ce qui établit le lemme dans ce cas particulier. Si nous ne faisons plus la supposition initiale, nous définissons le polynôme Q comme le polynôme ayant comme coefficients les modules des coefficients de P . Alors pour tout x réel positif $|P(x)| \leq Q(x)$ et en utilisant la majoration

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{P(n)}{\alpha^n} \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{Q(n)}{\alpha^n}$$

l'application de la première partie de la démonstration au membre de droite établit le lemme pour P quelconque. \square

En appliquant le lemme aux r inégalités (6.8) et en prenant la plus grande valeur B donnée par le lemme, nous avons alors pour tout ρ strictement inférieur à ρ^* une constante M_1 telle que

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} C_i(T_n) c_n \right| \leq \frac{M_1}{\rho^m}. \quad (6.9)$$

D'autre part et d'après la proposition 36 les coefficients l_k sont des fractions rationnelles dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur donc chaque fraction l_k est majorée par une constante. Alors compte tenu de la majoration des coefficients c_n , nous pouvons trouver une constante M_2 telle que

$$\left| \sum_{k=e-j}^e l_k(i) c_{m+k} \right| \leq \frac{M_2}{\rho^m}. \quad (6.10)$$

Les inégalités (6.9) et (6.10) entraînent alors la majoration

$$\|u_m\|_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=0}^m |(u_m)_i| \leq (m+1) \frac{\max(M_1, M_2)}{\rho^m}.$$

Comme cette majoration est valable pour tout $\rho < \rho^*$, nous pouvons établir que, pour tout $\rho < \rho^*$, il existe une constante positive M telle que

$$\|u_m\| \leq \frac{M}{\rho^m}.$$

Maintenant, en remarquant que $\mathbf{L}_m(\mathbf{c}_m - \mathbf{c}_m^{\text{ex}}) = u_m$ et en notant $K(m)$ le conditionnement de la matrice \mathbf{L}_m pour la norme induite par $\|\cdot\|_{\infty}$, nous avons

$$\|\mathbf{c}_m - \mathbf{c}_m^{\text{ex}}\|_{\infty} \leq K(m) \frac{M}{\rho^m}.$$

6.1 Une méthode de résolution

De cette majoration d'erreur sur les coefficients de Chebyshev nous allons tirer une majoration de l'erreur commise dans l'approximation de σ par σ_m . En effet

$$\begin{aligned}\|\sigma - \sigma_m\|_{[-1,1]} &\leq \|\sigma - s_m(\sigma)\|_{[-1,1]} + \|\sigma_m - s_m(\sigma)\|_{[-1,1]} \\ &\leq \frac{M'}{\rho^m} + \sum_{n=0}^m |c_{m,n} - c_n| \\ &\leq \frac{M'}{\rho^m} + (m+1)\|\mathbf{c}_m - \mathbf{c}_m^{\text{ex}}\|_{\infty}.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc la majoration

$$\|\sigma - \sigma_m\|_{[-1,1]} \leq \frac{M' + (m+1)K(m)M}{\rho^m} \quad (6.11)$$

qui est valable tout m sous la seule hypothèse que le système (6.6) soit inversible. Pour conclure, s'il en était besoin, quant à la convergence de la τ -méthode nous faisons la conjecture suivante

Conjecture 1

Il existe un polynôme \tilde{K} tel que $K(m) \leq \tilde{K}(m)$.

Cette conjecture est motivée par un résultat dû à Coutias *et al.* [16]. Ce résultat concerne une matrice construite à partir de la forme intégrale de l'équation différentielle et qui correspond, en y regardant de près, à la partie "bande" de notre matrice. Le conditionnement de cette matrice vérifie notre conjecture, il faudrait montrer que l'ajout des conditions supplémentaires ne modifie pas fondamentalement le conditionnement.

Moyennant notre conjecture, l'inégalité (6.11) montre que l'approximant donné par la τ -méthode converge vers la solution σ du problème (6.1) avec une erreur majorée par une suite de raison ρ^{-1} pour tout $\rho < \rho^*$. Si la fonction σ est analytique sur \mathbb{C} , nous avons $\rho^* = \infty$ ce qui implique que σ_m converge vers σ plus rapidement que toute suite géométrique. C'est par exemple le cas pour $\sigma(x) = \exp(x)$ que Rivlin a étudié en détail [57].

6.1.4 Remarques sur la méthode

Résolution sur un segment quelconque

Par souci de simplicité nous avons présenté notre méthode pour la résolution sur l'intervalle $[-1, 1]$. L'adaptation à la résolution sur un segment $[a, b]$ quelconque ne présente pas de difficulté particulière. Nous construisons le système linéaire à résoudre non plus à partir de l'équation aux différences $\mathcal{L}c_n = q_n$ mais à partir de l'équation $\mathcal{L}_{a,b}c_n = q_n^{a,b}$ construite dans la proposition 23. Il faut aussi effectuer la translation au niveau des conditions supplémentaires. Nous obtenons ainsi un système à résoudre que nous noterons

$$\mathbf{L}_m^{a,b} \mathbf{x} = \mathbf{q}_m^{a,b}. \quad (6.12)$$

Ce système peut être généré pour des valeurs arbitraires de a et b , que ce soient des valeurs numériques ou que a et/ou b soient des paramètres formels. L'utilisation du calcul formel nous permet même de résoudre le système (6.12) avec a et b formels. Cette possibilité sera utilisée dans les exemples présentés plus bas et surtout pour le calcul d'approximations rationnelles qui fera l'objet d'une section.

Lien avec les algorithmes du type Miller

La résolution d'un sous-système fini pour approcher les solutions du système infini présente quelques liens avec les méthodes de Miller, Olver et Clenshaw pour résoudre des équations aux différences instables au sens où leurs solutions présentes des caractères asymptotiques très différents qui font, en langage imagé, que certaines solutions masquent les autres. C'est précisément le cas avec la récurrence de Chebyshev d'après l'étude que nous avons faite des solutions formelles. Dans le cas très simple de l'équation $y' - ay = 0$, le système (6.6) que nous résolvons dans notre méthode correspond exactement à l'application de l'algorithme de Miller pour "extraire" la solution $I_n(a)$ de la récurrence de Chebyshev associée. L'algorithme de Miller se présente ainsi dans le cas étudié : pour N donné on pose $b_N(N+1) = 0$ et $b_N(N) = 1$, on détermine $b_N(n)$ pour $n = N-1, \dots, 0$ par la récurrence inverse

$$b_N(n) = \frac{2(n+1)}{a} b_N(n+1) + b_N(n+2)$$

et enfin on normalise *i.e.* on prend comme solution approchée de la récurrence

$$c_N(n) = b_N(n) \times \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} '(-1)^k b_N(2k) \right)^{-1}.$$

Il est facile d'établir que la suite $c_N(n)$ vérifie le système (6.6).

Sans entrer dans les détails, nous dirons que pour des équations différentielles d'ordre supérieur, la résolution du système (6.6) est à rapprocher du procédé de Clenshaw et Luke (voir Wimp [62, sections 4.7 et 7.4]) dans le cas où toutes les solutions dominées (donc les coefficients de Chebyshev de fonctions solutions) ont le même comportement asymptotique. Le procédé de Clenshaw est convergent sous certaines conditions assez techniques qu'il paraît difficiles à assurer *a priori* pour les récurrences que nous construisons.

Si nous ne pouvons, dans le cas général, ramener notre méthode à l'une des méthodes sus-mentionnées nous pouvons quand même interpréter ainsi la résolution du système (6.6) : les $m-r$ dernières lignes forcent la solution à vérifier la récurrence de Chebyshev tandis que les r premières lignes, correspondant aux conditions supplémentaires du problème différentiel, pénalisent les composantes divergentes (solutions formelles) qui s'y trouvent. Nous illustrons ce phénomène par l'exemple de l'exponentielle pour laquelle

$$c_{m,n}(a) = \underbrace{\frac{K_{m+1}(a)}{S_{m+1}(a)} I_n(a)}_{\rightarrow 1} - \underbrace{\frac{I_{m+1}(a)}{S_{m+1}(a)} K_n(a)}_{\rightarrow 0}$$

où nous avons posé

$$S_{m+1}(a) = K_{m+1}(a) \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} '(-1)^n I_{2n}(a) - I_{m+1}(a) \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} '(-1)^n K_{2n}(a).$$

Ainsi quand m croît, la partie divergente dans les coefficients s'estompe-t-elle.

Une remarque sur l'influence de la perturbation

Lanczos [36] avait remarqué qu'il obtenait une meilleure approximation de l'exponentielle par la τ -méthode avec une perturbation en T'_n qu'avec une perturbation en T_n . Par ailleurs, différents auteurs utilisant la τ -méthode note que celle-ci fonctionne mieux lorsque les équations différentielles sont transformées en équations intégrales. Et cela pas seulement pour les méthodes à base de polynômes orthogonaux, puisque Coleman [15, 14] fait le même constat avec des polynômes de Faber. Ces deux remarques traduisent le même phénomène. En effet, l'équivalence entre la méthode de Fox et notre méthode peut se traduire ainsi : perturber l'équation intégrée avec les polynômes de la base initiale revient à perturber l'équation différentielle avec les polynômes dérivés r fois, r étant l'ordre de l'équation.

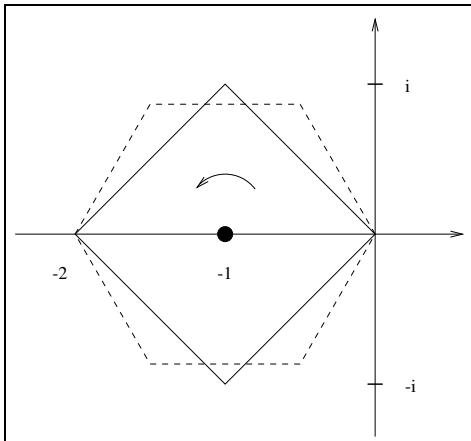
Dans notre cas, avec des perturbations en $T_n^{(r)}$, nous proposons une explication du phénomène basée sur le comportement asymptotique des solutions de la récurrence de Chebyshev. Nous avons remarqué (voir remarque 14) que le calcul des τ_k se fait après calcul des coefficients de l'approximant. Il est facile de vérifier que ce découplage entre calcul des coefficients et calcul des constantes de perturbations n'est possible qu'avec une perturbation en $T_n^{(r)}$. Avec tout autre type de perturbation il faut tout calculer simultanément. Une autre façon de voir ce phénomène est de dire que c'est dans le cas d'une perturbation en $T_n^{(r)}$ que les coefficients du résultat de la τ -méthode sont le plus en adéquation avec la récurrence de Chebyshev. En conséquence par l'effet de pénalisation dû aux conditions supplémentaires, intervient plus pleinement et nous dirons d'autant plus que les composantes divergentes divergent plus fortement.

Enfin pour revenir à l'aspect informatique, nous avons, si besoin est, les outils nécessaires pour utiliser tout type de perturbations par des polynômes orthogonaux classiques grâce à la procédure de changement de base **Conversion-OSP**, de même que nous pouvons appliquer la τ -méthode en travaillant dans d'autres bases de départ que celle de Chebyshev.

6.2 Applications et exemples

6.2.1 Intégration sur un chemin

Une première application de la possibilité d'utiliser notre méthode sur un segment $[a, b]$ quelconque est l'intégration d'une équation différentielle sur un chemin constitué d'une ligne brisée. L'intérêt pratique d'une telle opération est, par exemple, la segmentation d'une intégration sur un long intervalle ou le contournement d'une singularité dans le champ complexe. Soit une suite de points du champ complexe a_1, a_2, \dots, a_p . Nous supposerons que la ligne brisée formée en reliant ces points ne contient aucune singularité. L'objectif est d'évaluer la solution σ au point a_p . La solution unique est déterminée par n'importe quelles conditions du type (6.4) compatibles avec le segment $[a_1, a_2]$. Ensuite nous résolvons une suite de problèmes de Cauchy dont la condition à l'origine à l'extrémité gauche du segment est calculée de proche en proche. En résumé, le calcul est décrit par l'itération suivante :



degré	carré	hexagone
5	6.288142840	6.283939546
10	6.283216666	6.283186270
15	6.283185042	6.283185316

FIG. 6.3 – Le tableau à droite compare le résultat de l'intégration de $(1+x)y' = 1$ sur les deux chemins présentés à gauche. Les chiffres exacts sont notés en gras.

```

sol[1] := tau-solve({Ly = q,conditions},[a1, a2])
for k from 2 to p-1
do
    ordre = min(k,K)
    conditions-initiales = {y(i)(ak) =  $\frac{dy}{dx}$ x=ak-1sol[k-1](ak), i = 0...r - 1}
    sol[k] = tau-solve({Ly = q, conditions-initiales}, [ak, ak+1])
od
    
```

L'usage du calcul formel nous permet d'optimiser cette opération. En effet, la récurrence de Chebyshev associée à $Ly = q$ est calculée une seule fois avec a et b paramètres formels qui sont ensuite instanciés à chaque résolution sur un segment donné. De plus, dans la suite de problèmes de Cauchy les conditions initiales, toujours prises à la même extrémité du segment de résolution, ont la même contribution dans le système linéaire associé. Cette contribution est donc calculée une seule fois.

La fonction $\log(1+x)$ vérifie l'équation différentielle $(1+x)y' = 1$. Nous intégrons cette équation sur un chemin fermé qui tourne autour de la singularité en -1 . Nous savons que le résultat d'une telle intégration est un changement de feuillet sur la surface de Riemann du logarithme qui se traduit par une différence de $2i\pi$ entre les deux extrémités du chemin (confondues dans le champ complexe mais pas sur la surface de Riemann). La récurrence de Chebyshev relative à notre équation est

$$\frac{n-1}{2n}c_{n-1} - \frac{2+a+b}{a-b}c_n + \frac{n+1}{2n}c_{n+1} = \delta_{1,n}.$$

Nous avons calculé le résultat de l'intégration pour deux type de contour : un carré et un hexagone, parcourus dans le sens trigonométrique; et pour différents degrés d'approximation. Les résultats sont présentés par la figure 6.3

6.2.2 Systèmes différentiels

Une extension de la τ -méthode assez immédiate est la résolutions de systèmes différentiels linéaires à coefficients polynomiaux. Pour simplifier la présentation nous considérons des

6.2 Applications et exemples

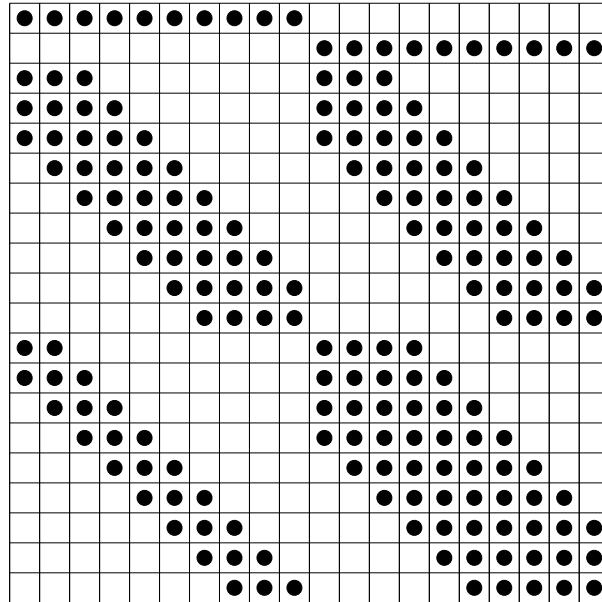
systèmes 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1,1}(x) & p_{1,2}(x) \\ p_{2,1}(x) & p_{2,2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (6.13)$$

la généralisation à des systèmes $n \times n$ étant très simple. Nous cherchons y_1 et y_2 sous forme de séries de Chebyshev de coefficients respectifs a_n et b_n . Il est alors facile de voir que ces coefficients vérifient les système d'équations aux différences

$$\begin{aligned} a_n &= \Delta(p_{1,1}(X_0)a_n + p_{1,2}(X_0)b_n) \\ b_n &= \Delta(p_{2,1}(X_0)a_n + p_{2,2}(X_0)b_n) \end{aligned}$$

Ce système induit, par la τ -méthode et après adjonction de conditions initiales pour y_1 et y_2 , un système linéaire donc la matrice à une silhouette du type

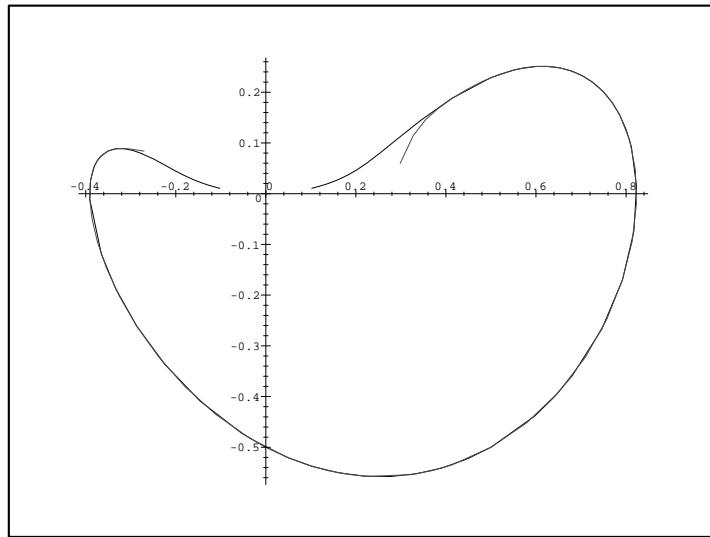


Comme dans le cas scalaire, on tiendra compte de cette structure pour optimiser la résolution du système.

Exemple 22 Le système différentiel (6.13) pour $p_{1,1}(x) = 0$, $p_{1,2}(x) = -2$, $p_{2,1}(x) = 1$ et $p_{2,2}(x) = -2x$ a pour solutions

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} e^{-x^2} \\ xe^{-x^2} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2F(x) \\ 1 - 2xF(x) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt .$$

Le graphe ci-dessous représente la solution exacte les conditions initiales $y_1(0) = 1/2$ et $y_2(0) = -1/2$ et la solution approchée de degré 20. Le “temps” d'intégration est assez long puisqu'il correspond à l'intervalle $[-5, 5]$.



Finissons par une remarque. Si nous transformons une équation scalaire en système différentiel avec la matrice companion associée, la résolution de ce système est comparable à la mise en oeuvre de la méthode de Clenshaw présentée plus haut.

6.2.3 Singularités irrégulières

Nous avons beaucoup insisté sur l'approximation des fonctions analytiques par les séries de Chebyshev mais nous pouvons être moins exigeants sur les fonctions et obtenir néanmoins des séries de Chebyshev convergeant vers ces fonctions. Par exemple, si la continuité sur $[-1, 1]$ (et par extension sur tout segment $[a, b]$) n'assure que la Cesaro-sommabilité, la série de Chebyshev d'une fonction C^1 converge en tout point vers la fonction [46].

Nous allons utiliser notre τ -méthode pour calculer les séries de Chebyshev de fonctions solutions d'équations différentielles singulières sur l'intervalle associé à la série. A travers ces exemples, nous allons montrer que malgré la singularité nous trouvons des résultats très précis.

La première fonction que nous considérons est $f(x) = \exp(-\frac{\alpha}{x})$ avec $\alpha > 0$. f est solution de l'équation homogène

$$x^2 y' - \alpha y = 0 \quad y(1) = \frac{1}{e}$$

La fonction f est C^∞ sur $[0, 1]$, mais ces dérivées successives étant toutes nulles en 0 elle n'est bien sûr pas analytique en ce point. Cependant l'approximation par les séries de Chebyshev tronquées permet un bon résultat et le calcul des séries par la τ -méthode se fait très bien. Wimp [62] obtient ces coefficients par un traitement direct de la relation de récurrence

$$(n+1)c_n + (3n+4-4\alpha)c_{n+1} + (3n+5+4\alpha)c_{n+2} + (n+2)c_{n+3} = 0 \quad (6.14)$$

qu'ils vérifient. La méthode utilisée est le *Clenshaw averaging process*. Wimp a tabulé ([62, table 7.1]) une valeur exacte à 10 décimales pour les 5 premiers coefficients en calculant les 54 premiers coefficients dans le cas $\alpha = 1$. Nous obtenons la même table avec la τ -méthode au même ordre. Nous remarquerons au passage que la récurrence (6.14) d'ordre 4 obtenue par Wimp, grâce à la connaissance d'une forme exacte de la solution cherchée, est celle obtenue par la méthode de Lewanowitz : elle est donc minimale. En revanche, celle qui est implicitement utilisée par notre méthode est d'ordre 5. Cela est dû à la singularité en 0. En effet, lorsque nous transformons l'intervalle $[0, 1]$ en $[-1, 1]$, le coefficient de tête de l'équation devient $(1 + x)^2$ et s'annule donc en -1 , ce qui implique que la récurrence que nous générerons

$$\mathcal{L} = (I + X_1)^2 - 2\alpha\Delta$$

n'est pas optimale. Mais elle se factorise, pour redonner la récurrence (6.14). La figure 6.4 présente les résultats que nous obtenons grâce à la τ -méthode.

Wimp [62, p.127] considère aussi la fonction

$$g(x) = \alpha x e^{\alpha x} \text{Ei}(\alpha x)$$

où Ei est l'exponentielle intégrale. Nous cherchons à approcher cette fonction sur $[1, \infty[$. Pour cela, nous ramenons le problème sur $[0, 1]$ en cherchant la série de Chebyshev de $g(1/x)$. Wimp utilise la même technique que précédemment, et nous la τ -méthode appliquée à l'équation

$$x^2 y' + (x - \alpha)y = -\alpha, \quad y(1) = \alpha e^\alpha \text{Ei}(\alpha).$$

Pour $\alpha = 2$, nous trouvons les coefficients de Chebyshev que ceux tabulés par Wimp.

Les résultats que nous venons de voir nous permettent d'entrevoir une possibilité d'utiliser notre méthode pour l'évaluation des séries formelles divergentes qui apparaissent dans les solutions formelles de type

$$e^{P(\frac{1}{x})} x^\lambda \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

d'équations holonomes, pratiquant ainsi une forme de resommation.

6.2.4 Equations non-linéaires

La τ -méthode est conçue originellement pour des équations holonomes, pour lesquelles on peut générer le système linéaire infini vérifier par les coefficients cherchés. Cependant une première extension dans le cas linéaire, proposée par Fox et Parker, consiste à remplacer les coefficients non polynomiaux par une approximation polynomiale (par les séries de Chebyshev par exemple). Ortiz et Samara [51] ont proposé une méthode itérative pour traiter les non-linéarités avec la τ -méthode. Nous allons présenter l'idée de base de la méthode sur le cas particulier des équations de Riccati. Nous ne donnons pas de résultats sur la convergence de la méthode, le but de cette section étant de montrer que notre outil de programmation rend absolument immédiate l'implémentation de la méthode.

Considérons l'équation de Riccati

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \quad y(x_0) = y_0 \quad (6.15)$$

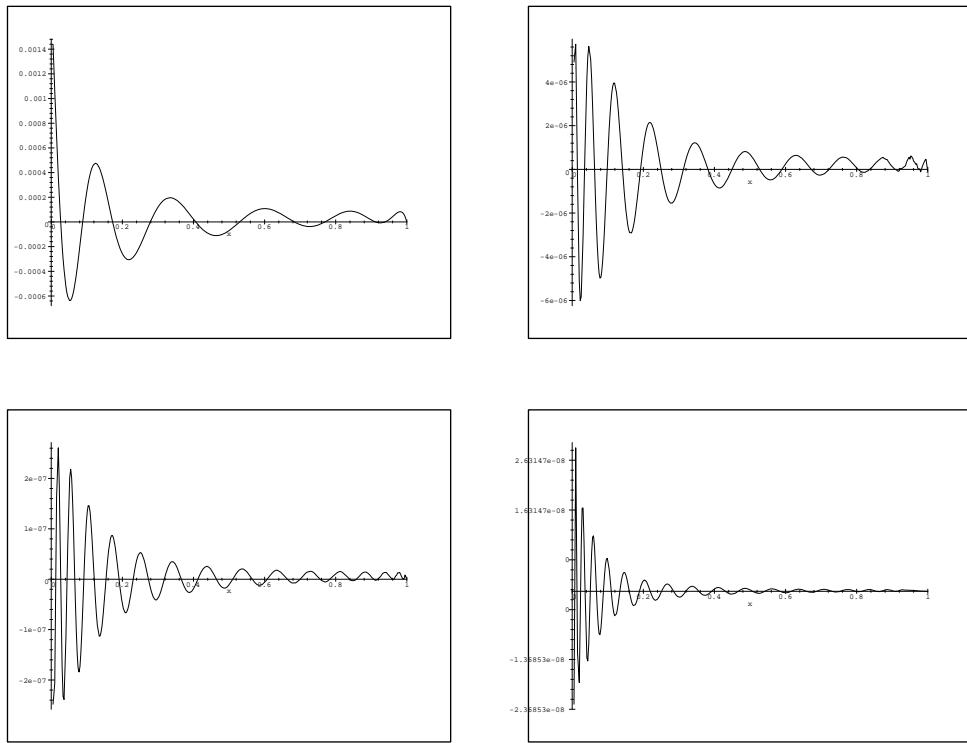


FIG. 6.4 – Erreurs commises dans l'approximation de $\exp(-2/x)$ par les solutions issues de la τ -méthode à l'ordre, respectivement de haut en bas et de gauche à droite, 10, 20, 30 et 40

6.2 Applications et exemples

où $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont des polynômes. La méthode d'Ortiz et Samara consiste en l'itération suivante

$$\begin{cases} Y_0 = y_0 \\ Y'_k - (A(x)Y_{k-1} + B(x))Y_k = C(x) \end{cases} \quad (6.16)$$

Les équations différentielles en Y_k sont résolues par la τ -méthode. On se fixe à l'avance un degré K pour l'approximation polynomiale cherchée. Ainsi les K premières étapes consistent à incrémenter de 1 le degré de Y_k dans la résolution de l'équation différentielle. Une fois atteint le degré K , la résolution se fait à degré constant, de sorte que $\deg(Y_k) = \min(k, K)$.

```
tau-riccati := procedure(A,B,C,K,N,y0,intervalle)
  Y = y0
  for k from 1 to N
    do
      ordre = min(k,K)
      Y = tau-solve({y' - (A(x)Y + B(x)) = C(x), y(x0) = y0}, ordre,intervalle)
    od
```

Une remarque fondamentale dans l'utilisation de cet algorithme est la suivante : dans la phase où le degré de Y_k est stabilisé, la matrice issue de la τ -méthode est pleine puisque l'extension est égale à l'ordre plus 1. De ce fait, la résolution en nombres rationnelles fait rapidement explosé la taille des coefficients. Il faut donc travailler avec des flottants. Il est alors fondamental d'avoir des systèmes linéaires bien conditionnés. En l'occurrence la remarque de J.P. Boyd [8] sur l'emploi de la base canonique en arithmétique exacte ne s'applique pas ici.

Exemple 23 Considérons l'équation de Riccati

$$y' + y^2 + y = -1, \quad y(0) = 1$$

dont la solution est

$$y(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3} \right).$$

Nous notons c_n les coefficients de la série de Chebyshev sur $[0, 1]$ de $y(x)$. Nous appliquons notre algorithme pour trouver des approximations polynomiales de degré d . Nous notons alors $c_n^{(d,N)}$ les coefficients du résultat de degré d obtenu en N itérations *i.e.* le résultat de $\text{tau-riccati}(-1, -1, -1, d, N, y(0) = 1, [0, 1])$. Nous avons tabulé ci-dessous (table 6.1) les résultats obtenus pour $d = 6$ avec 12 puis 18 itérations. Pour un degré fixé, il apparaît que les valeurs des $c_n^{(d,N)}$ convergent vers des valeurs qui ne sont pas les coefficients exacts. Pour diminuer l'erreur entre $c_n^{(d,N)}$ et c_n il faut augmenter le degré d des approximations. Nous le faisons dans le tableau suivant (où nous ne présentons que les 6 premiers coefficients) :

	c_n	$c_n^{(6,12)}$	$c_n^{(6,18)}$
0	.4268109278	.4269202146	.4269202127
1	-.6402520234	-.6402886946	-.6402886944
2	.1089322356	.1089463476	.1089463478
3	-.2873030299E-1	-.2873460131E-1	-.2873460121E-1
4	.6578394601E-2	.6579883442E-2	.6579883470E-2
5	-.1601254595E-2	-.1604168575E-2	-.1604168572E-2
6	.3803553684E-3	.3861973654E-3	.3861973660E-3

	$c_n^{(8,18)}$	$c_n^{(10,18)}$	$c_n^{(12,18)}$
0	.4268172978	.4268112956	.4268109466
1	-.6402541605	-.6402521473	-.6402520305
2	.1089330579	.1089322831	.1089322381
3	-.2873055239E-1	-.2873031743E-1	-.2873030392E-1
4	.6578470406E-2	.6578398962E-2	.6578394813E-2
5	-.1601278187E-2	-.1601255841E-2	-.1601254669E-2
6	.3803730802E-3	.3803557383E-3	.3803553892E-3

TAB. 6.1 – Coefficients de Chebyshev exacts et approchés de $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

6.3 Problème de Cauchy et approximation rationnelle

Nous considérons un problème de Cauchy associé à une équation différentielle holonome

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} y^{(i)}(x_0) = \gamma_i, & i = 0 \cdots r-1 \\ p_r(x)y^{(r)}(x) + \cdots + p_0(x)y(x) = q(x), & p_r(x_0) \neq 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Nous voulons obtenir une approximation de la solution σ de ce problème autour du point initial x_0 .

6.3.1 Approximant global

Avec une série de Chebyshev définie pour un segment contenant x_0 , nous savons que nous obtiendrons une approximation de σ dans une ellipse entourant x_0 . Seulement nous savons aussi, que la qualité de l'approximation se dégrade avec l'éloignement (dans le sens particulier que nous avons défini) par rapport au segment. Vient alors l'idée que pour calculer une valeur approchée de σ en un point x du plan il faut utiliser une série de Chebyshev définie sur un segment contenant x . Mais comme une telle série sera calculée avec notre méthode, il faudra aussi que x_0 soit sur ce segment. Il y a une infinité de segments contenant x . Il y a toujours une infinité de segments contenant x et x_0 , mais une “moindre” infinité si l'on ose dire. Le lemme suivant va nous permettre de choisir un segment meilleur que les autres dans un certain sens.

Lemme 10

6.3 Problème de Cauchy et approximation rationnelle

Soit f une fonction de \mathbb{M} . Soit $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$, deux segments du plan complexe tels que $[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$. Supposons de plus que f soit analytique sur $[a_2, b_2]$. Alors la vitesse convergence ρ_1^* de la série de Chebyshev de f sur $[a_1, b_1]$ est supérieure à la vitesse convergence ρ_2^* de la série de Chebyshev de f sur $[a_2, b_2]$.

Démonstration :

Soit s une quelconque singularité de f . Notons h_1 la similitude h_{a_1, b_1}^{-1} et h_2 la similitude h_{a_2, b_2}^{-1} . Rappelons que

$$\rho_1^* = \min_{s \in \text{Sg}(f)} r(h_1(s)) \quad \text{et} \quad \rho_2^* = \min_{s \in \text{Sg}(f)} r(h_2(s))$$

(la fonction r a été définie page 70 ainsi que la fonction l que nous utilisons plus bas). Introduisons h la similitude qui envoie a_1 sur a_2 et b_1 sur b_2 . Il est clair que $h_1 = h_2 \circ h$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que les points a_1, b_1, a_2 et b_2 sont ordonnés de façon que a_1 soit entre a_2 et b_1 . Cette similitude est en fait une homothétie dont le centre est situé entre a_1 et b_1 . Il est alors facile de voir que s est à l'intérieur du triangle $(a_2 h(s) b_2)$, ce qui implique que

$$|s - a_2| + |s - b_2| \leq |h(s) - a_2| + |h(s) - b_2|$$

Cette inégalité sera conservée si nous appliquons la similitude h_2 à chacun des points présents. Nous pouvons donc écrire, en nous souvenant que $h_1 = h_2 \circ h$,

$$|h_2(s) - 1| + |h_2(s) + 1| \leq |h_1(s) - 1| + |h_1(s) + 1|$$

i.e. $l(h_2(s)) \leq l(h_1(s))$ ce qui implique $r(h_1(s)) \leq r(h_2(s))$. Comme la dernière inégalité est vraie pour toute singularité de f , le résultat énoncé est démontré. \square

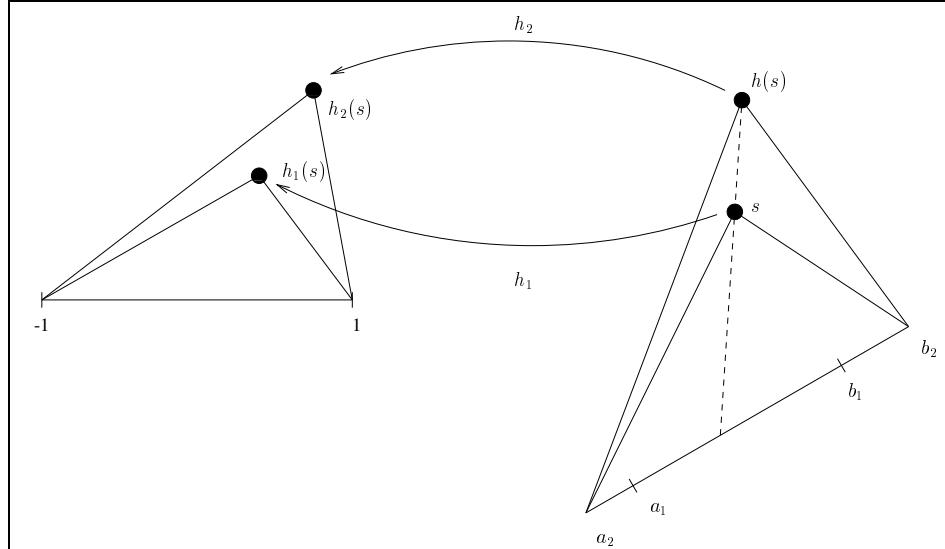


FIG. 6.5 – Action des similitudes h_1 , h_2 et h

Ainsi le choix naturel pour approcher σ en un point x est d'utiliser la série de Chebyshev définie sur $[x_0, x]$, que nous écrivons

$$\sum_{n=0}^{\infty} {}'c_n(x) T_n(h_{x_0, x}^{-1}(z)) .$$

Tronquons cette série à l'ordre m et évaluons la en x . En tenant compte du fait que $T_n(h_{x_0,x}^{-1}(x)) = T_n(1) = 1$, nous obtenons l'approximant suivant

$$\hat{\sigma}_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^m {}'c_n(x).$$

Nous le nommons approximant global car il synthétise en une seule expression, une infinité de séries de Chebyshev.

Exemple 24 Si $x_0 = 0$ et $\sigma(x) = \exp(x)$ alors l'approximant global est

$$\hat{\sigma}_m(x) = \sum_{n=0}^m {}'2I_n(x) \quad (6.18)$$

où les I_n sont les fonctions de Bessel modifiées. On reconnaît dans $\hat{\sigma}_m$ la série de Neumann of $\exp(x)$ tronquée à l'ordre m (voir [1, 9.6.37]).

Nous posons les deux questions suivantes : pour quelles valeurs de x l'approximant global $\hat{\sigma}_m$ est-il défini ? Quelle est la qualité de l'approximant ? La réponse à la première question nous est donnée par la définition : l'approximant existe en x si la série de Chebyshev de σ existe sur $[x_0, x]$ donc si $[x_0, x]$ ne contient pas de singularités de σ . Il est alors facile de voir que $\hat{\sigma}_m$ est définie sur l'étoile de Mittag-Leffler [6] du problème (\mathcal{P}) dont nous précisons la

Définition 20

Soit s_0 un point du plan complexe. Soit S un ensemble fini de points du plan complexe ne contenant pas s_0 . On appelle étoile de Mittag-Leffler relatif à s_0 et S le plan complexe privé des demi-droite issue de s et de direction s_0s pour tout point s de l'ensemble S .

On appelle étoile de Mittag-Leffler du problème (\mathcal{P}) , l'étoile de Mittag-Leffler relative à x_0 et à $\text{Sg}(\sigma)$.

Du fait des coupures, σ est une fonction analytique uniforme sur l'étoile de Mittag-Leffler du problème (\mathcal{P}) .

Pour estimer la qualité d'approximation d'une série de Chebyshev nous avons introduit la notion de vitesse de convergence. Nous pouvons introduire cette notion pour l'approximant global. Ainsi pour chaque point x de l'étoile de Mittag-Leffler nous dirons que $\hat{\sigma}_m$ a pour vitesse de convergence, la vitesse de convergence de la $[x_0, x]$ -série de Chebyshev de σ . Cette vitesse sera notée $\rho^*(x)$. Il est alors intéressant de déterminer les régions assurant une vitesse minimale de convergence pour $\hat{\sigma}_m$, ce qui revient en fait à déterminer les courbes de niveau de $\rho^*(x)$.

Définition 21

Soit un point x du plan complexe. Nous repérons un point y du plan complexe par les coordonnées $(r, \theta)_x$ telles que $r \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $y - x = re^{i\theta}$.

Proposition 45

Si s de coordonnées $(s_0, \theta_0)_{x_0}$ est l'unique singularité de σ , alors l'approximant $\hat{\sigma}_m$ converge au moins à la vitesse $\rho > 1$ en tout point intérieur au limaçon de Pascal décrit dans le système de coordonnées polaires $(r, \theta)_{x_0}$ par l'équation :

$$r = \frac{2\rho^2 s_0}{(\rho^2 - 1)^2} \left[\frac{\rho + \rho^{-1}}{2} - \cos(\theta_0 - \theta) \right]. \quad (6.19)$$

Démonstration :

L'équation de l'ellipse \mathcal{E}_ρ dans le système de coordonnées polaires $(r, \theta)_{-1}$ est (en application de résultats bien connus sur les coniques)

$$\mathcal{E}_\rho : r = \frac{pe}{1 - e \cos(\theta)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = \rho - \rho^{-1} \\ e = \frac{2}{\rho + \rho^{-1}} \end{cases}. \quad (6.20)$$

Pour θ fixé et x de coordonnées $(r, \theta)_{x_0}$, $h_{x_0, x}(s)$ a les coordonnées $(\frac{s_0}{2p}, \theta_0 - \theta)_{-1}$ et la vitesse de convergence de $\hat{\sigma}_m$ est supérieur à ρ si $h_{x_0, x}(s)$ est à l'intérieur de \mathcal{E}_ρ i.e. si

$$\frac{s_0}{2r} \leq \frac{pe}{1 - e \cos(\theta_0 - \theta)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s_0}{2p} \left(\frac{1}{e} - \cos(\theta_0 - \theta) \right) \leq r \quad (6.21)$$

et en substituant p et e par leurs expressions en fonction de ρ , nous obtenons le résultat énoncé. \square

Dans le cas où σ a plusieurs singularités, les domaines de vitesse minimale s'obtiennent par intersection des limaçons.

Exemple 25 Nous présentons en figure 6.6 les limaçons relatifs à $x_0 = 0$ et à une unique singularité $s = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et en figure 6.7 les domaines de vitesse de convergence pour l'approximant global centré en $x_0 = 0$ de l'arctangente, donc avec les singularités i et $-i$.

6.3.2 Approximation rationnelle : les τ -fractions

La notion d'approximant global est très théorique car elle suppose de pouvoir calculer l'infinité de séries de Chebyshev sous-jacentes. Dans la pratique, cela n'est pas possible. En revanche nous pouvons approcher ces séries par la τ -méthode appliquée au problème de Cauchy. En effet, nous pouvons établir le système linéaire correspondant à la résolution du problème de Cauchy sur le segment $[x_0, x]$ avec x quelconque c'est-à-dire paramètre symbolique dans le système. Ce système est noté d'après les notations vues plus haut

$$\mathbf{L}_m^{x_0, x} \mathbf{x} = \mathbf{q}_m^{x_0, x}. \quad (6.22)$$

Nous avons affaire à un système linéaire à coefficients fractions rationnelles en x dont le résultat est un vecteur de fractions rationnelles dont nous notons les composantes $\tilde{c}_{m,n}(x)$ et auquel nous associons la solution approchée

$$\tilde{\sigma}_m(x) = \sum_{n=1}^m {}' \tilde{c}_{m,n}(x)$$

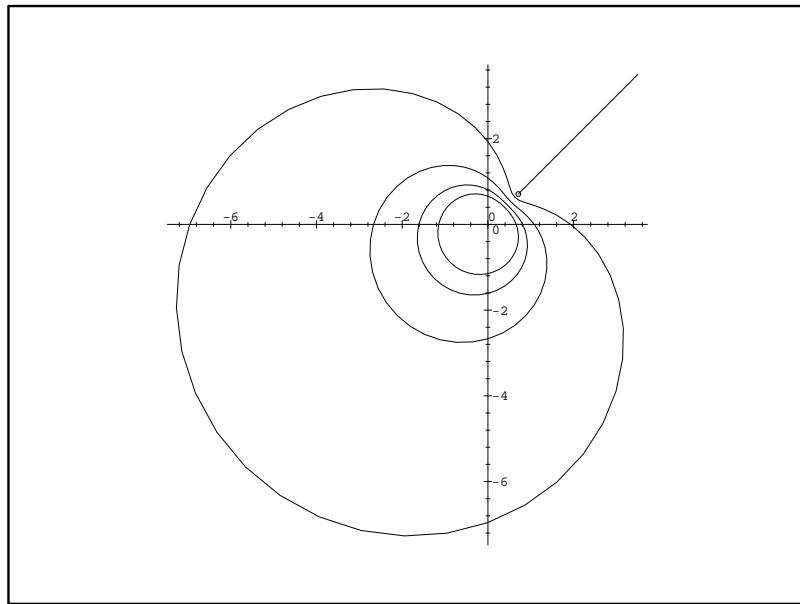


FIG. 6.6 – Limaçons de Pascal concentriques relatives à un approximant global centré en 0 avec une singularité en $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

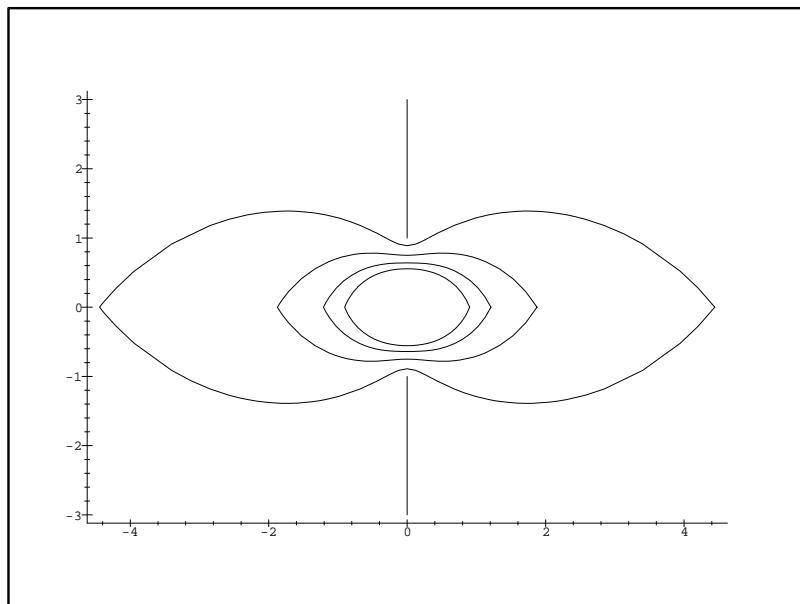


FIG. 6.7 – Intersections de limaçons donnant les domaines de vitesses de convergence pour l'approximant global de l'arctangente.

6.3 Problème de Cauchy et approximation rationnelle

qui est donc rationnelle. Pour la concision - à défaut d'élégance - nous nommerons “ τ -fraction” l'approximant $\tilde{\sigma}_m(x)$.

Illustrons par des exemples numériques les qualités d'approximation des τ -fractions. Soulignons, d'emblée, que bien que $\tilde{\sigma}_m(x)$ soit une fraction rationnelle, l'approximant a été calculé à l'aide d'une méthode initialement prévue pour des approximations polynômiales. Ainsi il n'est pas insensé de faire des comparaisons entre les τ -fractions et des approximants polynômaux du même degré que la τ -méthode. En particulier, nous allons comparer les τ -fractions avec les approximations polynômiales obtenues par J.P. Coleman [15, 14] grâce à la τ -méthode avec des perturbations sous forme de polynômes de Faber adaptés aux régions du plan complexe dans lesquelles l'approximation est cherchée. J.P. Coleman [14] présente deux versions de sa τ -méthode, l'une dite “directe” et l'autre “intégrée”, la seconde donnant de meilleurs résultats comme l'avait remarqué remarqué Lanczos pour les perturbations de Chebyshev (voir remarque plus haut). Nous allons constater ce fait numériquement. Une autre manière de générer une approximation rationnelle à partir d'une méthode polynômiale consiste, par exemple, à calculer l'approximant de Padé à partir de la série de Taylor tronqué de la solution σ (calculable à partir du problème de Cauchy).

Ainsi dans les exemples qui suivent nous allons comparer l'erreur (en norme infinie) d'approximation de la solution dans les cases suivants

- (1) Séries partielles de Taylor de degré n .
- (2) Approximants de Padé calculés à partir des $n + 1$ premiers termes de la série l'approximant $[p, p]$ si $n = 2p$ et $[p + 1, p]$ si $n = 2p + 1$.
- (3) Approximations polynômiales de Coleman (2 versions).
- (4) τ -fractions.

Les valeurs tabulées dans les exemples pour les cas (1) et (3) sont dues à Coleman.

Exemple 26 Les erreurs d'approximation par les τ -fractions de la fonction $\sigma(z) = \exp(z)$ ($\sigma'(z) - \sigma(z) = 0$, $\sigma(0) = 1$) sont données pour le un demi-disque (Table 6.2, voir Coleman [15, Table 1]) et sur le carré unité (Table 6.3, voir Coleman [15, Table 3]). Donnons les τ -fractions pour quelques valeurs de n :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_3(z) &= -\frac{z^3 + 10z^2 + 48z + 96}{z^3 - 10z^2 + 48z - 96} \\ \tilde{\sigma}_4(x) &= \frac{5z^4 + 80z^3 + 672z^2 + 3072z + 6144}{5z^4 - 80z^3 + 672z^2 - 3072z + 6144} \\ \tilde{\sigma}_5(x) &= -\frac{3z^5 + 70z^4 + 896z^3 + 6912z^2 + 30720z + 61440}{3z^5 - 70z^4 + 896z^3 - 6912z^2 + 30720z - 61440}\end{aligned}$$

Remarquons que ces fractions vérifient une propriété de l'exponentielle puisque $\tilde{\sigma}_n(-z) = \tilde{\sigma}_n^{-1}(z)$.

Exemple 27 Cet exemple traite de l'intégrale de Dawson qui est définie par

$$F(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{s^2} ds. \quad (6.23)$$

Degré	Taylor	τ -méthode de Coleman	Approximants de Padé	τ -fractions
3	5.16E-2	3.18E-2	4.26E-2	1.02E-3
4	9.95E-3	4.00E-3	5.52E-3	1.03E-4
5	1.62E-3	3.34E-4	6.63E-4	2.01E-6
6	2.26E-4	2.81E-5	6.65E-5	1.51E-7
7	2.79E-5	1.76E-6	6.58E-6	2.21E-9
8	3.06E-6	1.11E-7	5.52E-7	1.31E-10
9	3.03E-7	5.52E-9	4.60E-8	1.52E-12
12	1.73E-10	1.15E-11	4.82E-12	2.96E-17

TAB. 6.2 – Erreurs d’approximation de $\exp(z)$ par les τ -fractions sur le secteur $|z| \leq 1$, $|\arg z| \leq \pi/2$

Degré	Taylor	τ -méthode de Coleman	Approximants de Padé	τ -fractions
3	2.03E-1	1.88E-1	1.12E-1	5.35E-3
4	5.56E-2	3.27E-2	2.16E-2	5.13E-4
5	1.28E-2	5.81E-3	2.55E-3	2.15E-5
6	2.54E-3	9.98E-4	3.06E-4	1.53E-6
7	4.43E-4	1.45E-4	2.72E-5	4.74E-8
8	6.89E-5	1.89E-5	2.43E-6	2.69E-9
15	1.30E-11	1.19E-12	4.86E-15	2.21E-20

TAB. 6.3 – Erreurs d’approximation de $\exp(z)$ par les τ -fractions sur le carré $|\operatorname{Re}(z)| \leq 1$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq 1$.

6.3 Problème de Cauchy et approximation rationnelle

La fonction $F(z)$ étant impaire nous posons $u(t) = F(z)/z$ avec $t = z^2$. La fonction u est solution de l'équation différentielle

$$2ty'(t) + (1 + 2t)y(t) = 1, \quad y(0) = 1 \quad (6.24)$$

et a le développement en série de Taylor suivant

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k t^k}{(2k+1)!!}. \quad (6.25)$$

La table 6.4 les erreurs d'approximation de $u(t)$ par les τ -fractions sur le secteur $\{t : |t| \leq 1, |\arg(t)| \leq \frac{\pi}{6}\}$ (voir Coleman [14, table 2]).

Faisons quelques observations relatives aux pôles des τ -fractions.

Exemple 28 Si $\sigma(x) = \arctan(x)$ alors $(1 + x^2)\sigma'(x) = 1$ et $\sigma(0) = 0$. Notre méthode construit alors les τ -fractions suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_3(x) &= \frac{16}{3} \frac{x(280x^2 + 35x^4 + 384)}{15x^6 + 504x^4 + 2176x^2 + 2048} \\ \tilde{\sigma}_4(x) &= \frac{16}{3} \frac{x(5x^2 + 16)(39x^4 + 608x^2 + 768)}{4048x^6 + 55x^8 + 37888x^4 + 94208x^2 + 65536} \\ \tilde{\sigma}_5(x) &= \frac{32}{15} \frac{x(41896x^6 + 1155x^8 + 317824x^4 + 727040x^2 + 491520)}{91x^{10} + 12896x^8 + 226304x^6 + 1101824x^4 + 1900544x^2 + 1048576} \end{aligned}$$

En utilisant les suites de Sturm, nous vérifions que tous les pôles des approximants $\tilde{\sigma}_n$ ci-dessus sont soit sur la demi-droite $[i, i\infty[$ soit sur la demi-droite $[-i, -i\infty[$ c'est-à-dire les coupures de l'étoile de Mittag-Leffler associée. Ainsi l'approximant $\tilde{\sigma}_n$ est-il défini entièrement sur l'étoile avec bien sûr une dégradation de la précision avec l'éloignement par rapport à l'origine. Cette appartenance des pôles aux coupures est particulière à cet exemple et due à la symétrie de l'équation différentielle $(1 + x^2)\sigma'(x) = 1$. Dans le cas général, il semble expérimentalement que les pôles de $\tilde{\sigma}_n$ s'approchent des coupures de l'étoile de Mittag-Leffler ou alors tendent vers l'infini quand s'y trouve une singularité. Illustrons ce point avec les exemples suivants :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{1+x} &: (1+x)y' - xy = 0, \quad y(0) = 1 \\ \frac{1}{2-2x+x^2} &: (2-2x+x^2)y = 1 \end{aligned}$$

pour lesquels les coupures et les pôles des τ -fractions sont présentés sur les figures 6.8 et 6.9.

Nous avons appliqué la notion d'approximant global à la recherche de solutions de problèmes de Cauchy sous forme de τ -fractions. La particularité d'un problème de Cauchy est d'assurer que le point pour lequel sont données les conditions initiales est contenu par tous les segments qui définissent implicitement la τ -fraction, légitant ainsi l'emploi de la τ -méthode.

Degré	Taylor	τ -méthode de Coleman	Approximants de Padé	τ -fractions
3	1.5E-2	6.2E-4	2.3E-3	2.8E-5
4	2.7E-3	5.2E-5	1.9E-4	3.6E-6
5	4.2E-4	3.4E-6	2.1E-5	4.5E-8
6	5.7E-5	2.0E-7	1.1E-6	4.4E-9
7	6.8E-6	1.1E-8	8.3E-8	4.3E-10
8	7.2E-7	4.9E-10	3.7E-9	3.4E-12

TAB. 6.4 – Erreurs d'approximation de $u(t)$ par les τ -fractions sur le secteur $|t| \leq 1$, $|\arg t| \leq \pi/6$

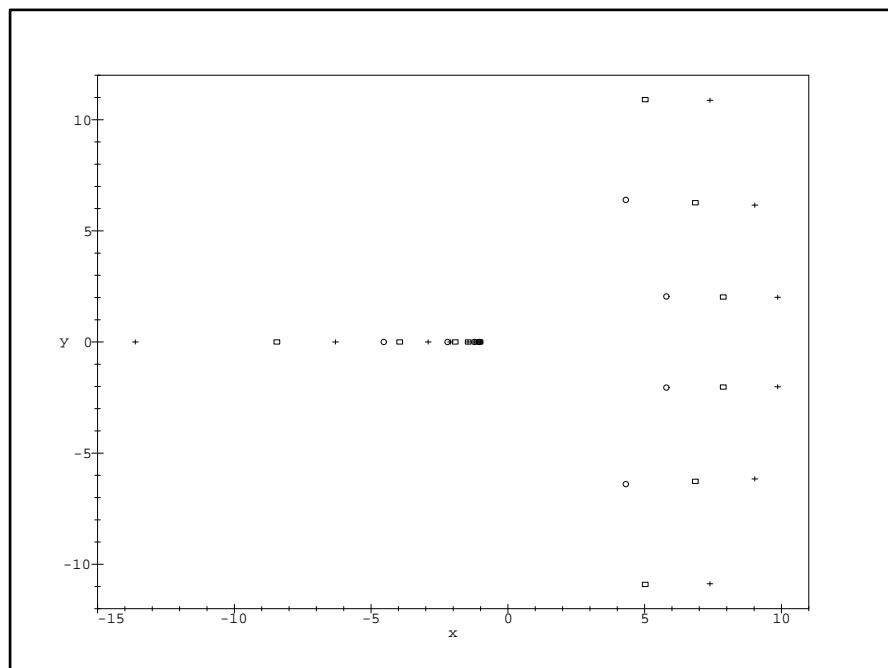


FIG. 6.8 – Pôles des τ -fractions approximant $\frac{e^x}{1+x}$, de degré : 4 (o), 6 (□) et 8 (+).

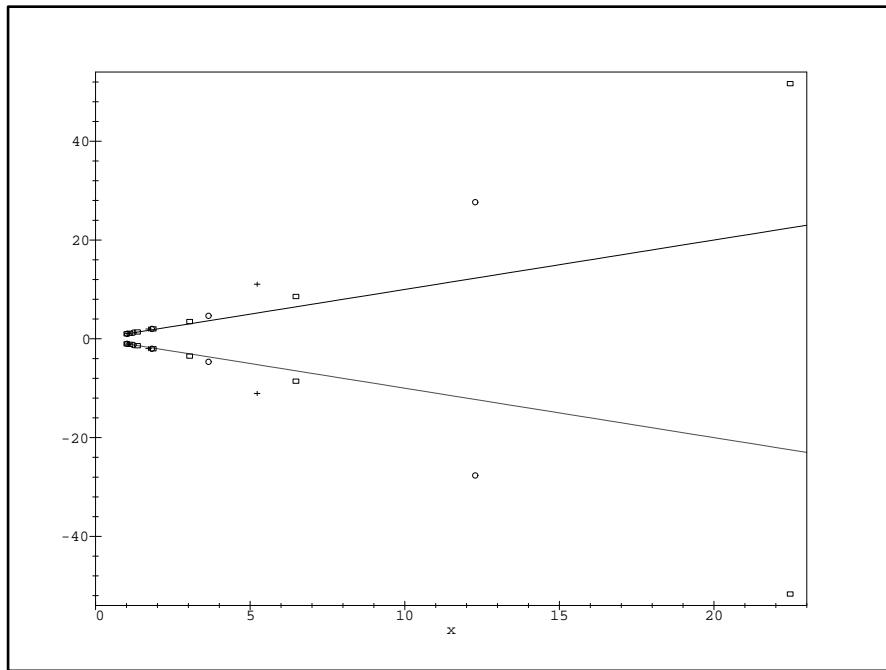


FIG. 6.9 – Pôles des τ -fractions approximant $\frac{1}{2-2x+x^2}$ de degré : 2 (+), 4 (o) et 6 (□).

Néanmoins les propriétés de convergence hors des segments de définition des séries de Chebyshev permettent l'emploi de la τ -méthode pour des problèmes dont les conditions supplémentaires sont données en des points extérieurs au segment mais intérieurs à une ellipse de convergence. On peut ainsi donner la solution d'un problème aux limites sous forme d'une τ -fraction.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous n'avons pas eu la prétention de présenter une méthode de résolution d'équation différentielle nouvelle. Nous avons bien marqué la filiation de notre méthode avec une série d'autres méthodes qui partagent la propriété d'être en dernier ressort des τ -méthodes. En revanche nous avons tenté de montrer que l'implémentation en MAPLE de l'algorithmique de manipulation des séries orthogonales, et en particulier de Chebyshev, nous permet de faciliter l'usage des τ -méthodes et de l'adapter à des situations nouvelles.

Conclusion

Bilan

En usant de la terminologie introduite dans ce mémoire, nous pouvons résumer les objectifs de notre travail : premièrement le **calcul effectif** de la récurrence de Chebyshev et deuxièmement **l'étude théorique** de celle-ci.

Aspect algorithmique

Grâce à la très belle théorie des polynômes hypergéométriques, nous avons obtenu une méthode générale pour l'application d'un opérateur différentiel à une série développée suivant une famille de polynômes hypergéométriques, donc à toute série orthogonale classique et en particulier aux séries de Chebyshev. L'implémentation en MAPLE de cette méthode dans le package *orthoserie* fournit un outil essentiel et souple pour la mise en oeuvre de méthodes de résolution d'équations différentielles holonomes. En particulier, nous avons écrit des procédures de résolution reposant sur la τ -méthode de Lanczos et aboutissant à des approximations polynomiales aussi bien que rationnelles des solutions cherchées.

Aspect théorique

Au commencement de notre travail de thèse, nous avions un objectif théorique bien défini : déterminer la nature des solutions formelles issues de la récurrence de Chebyshev et leur relation avec les fonctions solutions de l'équation différentielle initiale. A cette problématique, dont nous n'avons pas trouvé trace dans la littérature, nous avons fourni un ensemble de réponses de natures diverses. En premier lieu, nous avons montré comment l'on peut à partir d'un polygone de Newton construit sur l'équation différentielle originelle déduire le caractère Gevrey précisé des solutions formelles. Mais au-delà de cette première analyse, notre but primordial était de voir se reproduire pour les séries de Chebyshev ce petit miracle qui, dans la théorie de la multi-sommabilité, fait ressurgir d'une série de Taylor divergente une fonction solution d'équation différentielle. Bien loin d'avoir produit pour les séries de Chebyshev une théorie aussi complète et élégante que celle de la multi-sommabilité pour les séries de Taylor formelles, nous avons en revanche illustré le lien existant entre solutions formelles et fonctions solutions : d'une part sous la forme d'une intégrale et d'autre part en utilisant des procédés de resommation issus de la k -sommabilité. Nous avons enfin décrit et programmé des méthodes pour la reconstruction d'équations différentielles à partir de la récurrence de Chebyshev ou à partir d'une série formelle. Ces deux procédés sont, outre leur intérêt théorique, des outils fort utiles pour poursuivre l'étude des solutions formelles puisqu'ils permettent la construction d'exemples plus délicats à obtenir qu'avec les séries de Taylor.

Perspectives

En ce qui concerne notre code informatique nous devons y incorporer d'autres méthodes spectrales pour les équations différentielles ordinaires et surtout les équations aux dérivées partielles. Avec les outils dont nous disposons, nous pouvons disposer rapidement de ces extensions. Nous aurions alors un code consistant qui viendrait appuyer l'idée que le calcul formel peut faciliter la mise en oeuvre des méthodes spectrales, permet d'augmenter la taille des problèmes traités et de diminuer le coût de calcul.

D'un point de vue mathématique, une première idée serait de valider analytiquement, comme l'avons fait pour les séries de Chebyshev, les procédés formels pour les séries de polynômes orthogonaux. Pour cela nous pourrons exploiter des résultats de convergence existants pour les séries de Jacobi (sur des disques elliptiques), de Laguerre (sur des paraboles) et d'Hermite (des bandes de plan). Une suite logique de cette analyse serait l'étude de récurrences de Jacobi, Laguerre et Hermite. Cette étude sera probablement plus délicate qu'avec les séries de Chebyshev qui se distinguent par des propriétés bien spécifiques. Enfin, et à plus court terme, nous avons à compléter l'étude des solutions formelles de Chebyshev dans les directions indiquées au chapitre 5.

Bibliographie

- [1] Abramowitz (M.) et Stegun (I.A.) (édité par). – *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphes and Mathematical Tables*. – National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964, ninth édition, *Applied Math. Series*, volume 55.
- [2] Balser (W.). – *From divergent power series to analytic functions. Theory and application of multisummable power series*. – Berlin, Springer, 1994, *Lecture Notes in Mathematics*. 1582.
- [3] Barkatou (M.A.). – Rational newton algorithm for computing formal solutions of linear differential equations. In : *Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC'88*, éd. par P.Gianni. pp. 183–195. – ACM Press, 1988.
- [4] Barkatou (M.A.) et Duval (A.). – Sur les séries formelles solutions d'équations aux différences polynômiales. *Annales de l'Institut Fourier*, vol. 44, n° 2, 1994, pp. 495–524.
- [5] Bonan (S.) et Nevai (P.). – Orthogonal polynomials and their derivatives. *J. Approx. Theory*, vol. 40, 1984, pp. 134–147.
- [6] Borel (E.). – *Leçon sur les séries divergentes*. – Gauthier-Villars, 1928.
- [7] Boyd (J.P.). – *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. – Heidelberg, Springer-Verlag, 1989.
- [8] Boyd (J.P.). – Chebyshev and Legendre spectral methods in algebraic manipulation languages. *J. Symbolic Computation*, vol. 16, 1993, pp. 377–399.
- [9] Canuto (C.), Hussaini (M.Y.), Quarteroni (A.) et Zang (T.A.). – *Spectral methods in fluid dynamics*. – Berlin, Springer Verlag, 1988.
- [10] Chihara (T.S.). – *An introduction to orthogonal polynomials*. – New york, Gordon and Breach Publ., 1978.
- [11] Clenshaw (C.W.). – A note on the summation of Chebyshev series. *M.T.A.C.*, vol. 9, 1955, pp. 118–120.
- [12] Clenshaw (C.W.). – Numerical solution of linear differential equations in Chebyshev series. *Proc. Cambridge Phi. Soc.*, vol. 53, 1957, pp. 134–149.
- [13] Codutti (M.). – NODES : Non linear Ordinary Differential Equations Solver. In : *Proceedings of ISSAC'92*. – juillet 1992.
- [14] Coleman (J.P.). – Complex polynomial approximation by the Lanczos τ -method : Dawson's integral. *Journal of Computational and applied mathematics*, vol. 20, 1987, pp. 137–151.
- [15] Coleman (J.P.). – Polynomial approximations in the complex plane. *Journal of Computational and applied mathematics*, vol. 18, 1987, pp. 193–211.

- [16] Coutsias (E.A.), Hagstrom (T.) et Torres (D.). – An efficient spectral method for ode with rational function coefficients. *Mathematics of Computation*, vol. 65, n° 214, avril 1996, pp. 611–635.
- [17] Crisci (M.R.) et Ortiz (E.L.). – *Existence and convergence results for the numerical solution of differential equations with the tau method*. – Rapport technique, Imperial College University of london, 1981.
- [18] Davis (P.J.). – *Interpolation and approximation*. – Dover, 1963.
- [19] Della Dora (J.), Dicrescenzo (C.) et Tournier (E.). – An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogeneous differential equation at an irregular singular point. In : *EUROCAM 82*. pp. 273–280. – Marseille/France, 1982.
- [20] El-Daou (M.K.), Ortiz (E.L.) et Samara (H.). – A unified approach to the tau method and Chebyshev series expansion techniques. *Comput. Math. Appl.*, vol. 25, n° 3, 1993, pp. 73–82.
- [21] Elliott (D.). – The expansion of functions in ultraspherical polynomials. *J. Austral. math. Soc.*, vol. 1, 1960, pp. 428–438.
- [22] Erdelyi (A.), Magnus (W.), Oberhettinger (F.) et Tricomi (F.G.). – *Higher transcendental functions. Volume II*. – McGraw-Hill, 1953.
- [23] Fabry (M.E.). – *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. Thèse*. – Paris, Gauthier-Villars, 1885.
- [24] Fox (L.). – Chebyshev methods for ordinary differential equations. *The computer journal*, vol. 4, 1962, pp. 318–331.
- [25] Fox (L.) et Parker (I.B.). – *Chebyshev polynomials in numerical analysis*. – Oxford University Press, London, 1968.
- [26] Freud (G.). – *Orthogonale polynome*. – Basel Stuttgart, Birkhauser, 1969.
- [27] Geddes (K.O.). – Symbolic computation of recurrence equations for the Chebyshev series solution of linear ode's. In : *MACSYMA user's conference*, pp. 405–423. – 1977.
- [28] Geddes (K.O.). – Near minimax polynomial approximation in an elliptical region. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, 1978, pp. 1225–1233.
- [29] Godoy (E.), Ronveaux (A.), Zarzo (A.) et Area (I.). – Minimal recurrence relations for connection coefficients between classical orthogonal polynomials : Continous case. *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 84, 1997, pp. 257–275.
- [30] Gradshteyn (I.S.) et Ryzhik (I.M.). – *Table of integrals, series and products*. – New York, San Francisco, London, Academic Press, 1965.
- [31] Hahn (W.). – Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen. *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, 1935, pp. 634–638.
- [32] Ince (E.L.). – *Ordinary differential equations*. – Dover, 1956.
- [33] Koepf (W.). – Power series in computer algebra. *J. symbolic computation*, vol. 13, 1992, pp. 581–603.
- [34] Krall (H.L.). – On derivatives of orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Bull.*, vol. 42, 1936, pp. 423–428.
- [35] Lanczos (C.). – Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. *J. Math. and Phys.*, vol. 17, 1938, pp. 123–138.

- [36] Lanczos (C.). – *Applied Analysis*. – London, Prentice-Hall, 1956.
- [37] Lewanowicz (S.). – Construction of a recurrence relation of the lowest-order for coefficients of the Gegenbauer series. *Zastosowania Matematyki*, vol. 15, 1983, pp. 345–395.
- [38] Lewanowicz (S.). – Construction of the lowest-order recurrence relation for the Jacobi coefficients. *Zastosowania Matematyki*, vol. 17, 1983, pp. 655–675.
- [39] Lewanowicz (S.). – A new approach to the problem of constructing recurrence relations for the Jacobi coefficients. *Zastosowania Matematyki*, vol. 21, 1991, pp. 303–326.
- [40] Lewanowicz (S.). – Quick construction of recurrence relations for the Jacobi coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 43, 1992, pp. 355–372.
- [41] Lewanowicz (S.). – Results on the associated classical orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 65, décembre 1995, pp. 215–231.
- [42] Luke (Y.L.). – *The special functions and their approximations*. – Academic Press, 1969.
- [43] Luke (Y.L.). – *Mathematical functions and their approximations*. – Academic Press, 1975.
- [44] Malgrange (B.). – Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières. – 1981. preprint Institut Fourier.
- [45] Maroni (P.). – Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques. *Ann. Mat. Pura Appl.*, IV. Ser., vol. 149, 1987, pp. 165–184.
- [46] Moore (N.C.). – Applications of the theory of summability to developments in orthogonal functions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 25, 1919, pp. 258–275.
- [47] Nikiforov (A.) et Ouvarov (V.). – *Fonctions spéciales de la physique mathématique*. – Editions de Moscou, 1983.
- [48] Olaefe (G.O.). – On Tchebyschev method of solution of ordinary differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 60, 1977, pp. 1–7.
- [49] Ortiz (E.L.). – The tau method. *SIAM J. Numer. Anal.*, septembre 1969, pp. 480–491.
- [50] Ortiz (E.L.). – Canonical polynomials in the Lanczos tau method. In : *Stud. Numer. Anal., Papers in Honour of Cornelius Lanczos*, pp. 73–93. – 1974.
- [51] Ortiz (E.L.) et Samara (H.). – An operational approach to the tau method for numerical solution of non-linear differential equations. *Computing*, vol. 27, 1981, pp. 15–25.
- [52] Pflügel (E.). – *DESIR-II*. – Rapport technique n° RT-154, LMC-IMAG, BP 53, 38041 GRENOBLE cedex 09, France, Laboratoire de Modélisation et de Calcul, 1996.
- [53] Pflügel (E.). – On the latest version of DESIR. *Theoretical Computer Science*, vol. 187, 1997, pp. 81–86.
- [54] Pincherle (S.). – Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. *Acta Mathematica*, vol. 16, 1892, pp. 341–363.
- [55] Ramis (J.P.). – Dévissage Gevrey. *Astérisque S.M.F.*, 1978, pp. 173–204.
- [56] Ramis (J.P.). – Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires. *Memoirs of the A.M.S.*, no296, 1984.

- [57] Rivlin (T.). – *Chebyshev Polynomials*. – John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [58] Romanovki (V.). – Sur quelques classes nouvelles de polynômes orthogonaux. *C.-R. Acad. Sc. Paris*, vol. 188, 1929, pp. 1023–1025.
- [59] Ronveaux (A.), Hounkonnou (M.N.) et Belmehdi (S.). – Generalized linearization problems. *J. Phys. A : Math. Gen.*, vol. 28, n° 15, 1995, pp. 4423–4430.
- [60] Salvy (B.) et Zimmermann (P.). – *Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable*. – Rapport technique, INRIA, 1992.
- [61] Szegö (G.). – *Orthogonal Polynomials*. – American Mathematical Society, New York, 1959.
- [62] Wimp (J.). – *Computations with Recurrence Relations*. – Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [63] Yañez (R. J.), Dehesa (J. S.) et Nikiforov (A. F.). – The three-term recurrence relation and the differentiation formulas for hypergeometric-type functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 188, 1994, pp. 855–866.